Opdracht 7.4.A: Wiskunde B-dag

Vakdidactiek Wiskunde

Karel Van Oudheusden (alias Edgar G. Daylight)

9 januari 2023

Dit verslag bestaat uit drie delen:

- Deel 0: Mijn eigen bevindingen m.b.t. de wiskundige opgaven
- Deel 1: Hoe ben ik bij de beoordeling tewerk gegaan?
- Deel 2: Een koppeling maken met de onderzoekscompetentie (van de gemiddelde leerling en ook de leerkracht)

Deel 0 heb ik geschreven alvorens de oplossingen van de leerlingen te bekijken. Delen 1 en 2 bevatten mijn antwoorden m.b.t. Opdracht 7.4.A.

Deel 0: Mijn eigen bevindingen

Inleidende vraag

Na een titelblad begint het stuk "Eenvou(w)dig" op pagina 2 met een meerkeuzevraag over een strook papier die enkele keren dubbelgevouwen wordt. Het eerste deel van de vraag luidt als volgt:

> *Een strook papier wordt drie keer dubbel gevouwen (sic). Daarna wordt hij opengevouwen. Als je het papiertje rechtop zet, dan zie je van boven de vouwtjes. Welke van de volgende tekeningen van die bovenrand is fout?*

In eerste instantie heb ik met een blad papier gewerkt en niet met een "strook papier." Nu kan een blad papier al op verschillende manieren één keer dubbelgevouwen worden. (Deze opmerking geldt ook voor een papierstrook.) Maar na enige reflectie werd het aan de hand van de voorgestelde oplossingen (van *A.* tot en met *E.*) voor mij helder dat het "dubbelvouwen" impliceert dat de langste zijde gehalveerd dient te worden.[1]

In tweede instantie heb ik me afgevraagd of ik me aan het toespitsen was op het blad *an sich* of eerder op het vouwproces. M.a.w. was ik "structural abstraction" of eerder "operational abstraction" van David Tall aan het toepassen in mijn

[1] Het werd "voor mij duidelijk" op basis van gezond verstand, d.w.z. op basis van een ongeschreven *conventie* tussen de vraagsteller en mezelf. Zonder die conventie kan het twee keer dubbelvouwen van een blad (of een strook) op veel manieren uitgevoerd worden, o.a. door het blad langs een diagonaal te plooien.

vertaalslag van een werkelijk blad naar de mathematische symboliek?[2] Bij het oplossen van de andere vragen in de vragenlijst werd het duidelijk dat het voornamelijk om het laatste ging: door verschillende experimenten met het vouwen van een papierstrook uit te voeren heb ik in zekere zin horizontaal gemathematiseerd maar dan wel zonder het begrip “model” expliciet in de mond te nemen. Ik ga hier in Deel 2 verder op in.

In derde instantie heb ik elk van de keuzes *A.* t.e.m. *E.* van de meerkeuzevraag met de discrete symbolen $0, -$ en 1 voorgesteld. Zo heb ik keuze *A.* als volgt genoteerd:

$$- 0 - 0 - 1 - 0 - 0 - 1 - 1 -$$

Elke 0 stelt een dal voor en elke 1 een piek.

Direct daarna vond ik de horizontale strepen overbodig en schreef ik vervolgens keuze *A.* op een compactere manier neer:

$$0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1$$

Deze reeks *bits* stellen — in navolging van het begrip “procept” van David Tall — op statische wijze een vouwproces voor.

Als ik echter van de onderkant van de rechtopstaande strook de bovenkant maak, dan verkrijg ik de *bit flip* van de vorige reeks:

$$1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0$$

Als ik mijn eigen positie van waarnemen niet verander maar mijn rechtopstaande strook met 180 graden roteer, dan verkrijg ik vervolgens:

$$0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1$$

Zowel de eerste reeks bits als deze laatste (derde) reeks bits behoren tot de lijst van mogelijke oplossingen en zijn wat mij betreft de enige twee correcte oplossingen van de meerkeuzevraag in kwestie.

[Achteraf bekeken — meer bepaald na het schrijven van delen 0, 1 en 2 in dit verslag — blijkt dat er nog meer opties in de meerkeuzevraag correct zijn. Mijn bovenstaande redenering is “apart” te noemen aangezien de casus helemaal niet over verschillende invalshoeken van observeren gaat maar over precies twee alternatieve manieren van vouwen. Nochtans staat in de vraag klaar en duidelijk dat een strook papier drie keer dubbelgevouwen wordt, niet dat men over

[2] David Tall, *How Humans Learn to Think Mathematically*, Cambridge University Press, 2013.

verschillende combinaties van links en rechts vouwen moet redeneren. Ik veronderstel dan ook dat de vraag met mondelinge toelichting en een demonstratie aan de leerlingen kenbaar werd gemaakt. Bij nader inzien is *D.* het enige foute antwoord. En nu zie ik dat in de vraagstelling de woorden “is fout” staan wat impliceert dat er precies één fout antwoord is.]

Deel A: Verkenning

Op pagina 4 wordt een duidelijk onderscheid gemaakt tussen een *vouwrecept* en een *looppatroon*. En op pagina 5 staat er het volgende:

- het **vouwrecept** […] geeft aan hoe er moet worden gevouwen, met een rijtje letters l en r
- het **looppatroon** is het resultaat na uitvoering van een vouwrecept, beschreven met een figuur en/of een rijtje letters L en R.

Verwijzen de woorden “het resultaat na uitvoering” naar de uitvoering van een werkelijk experiment in de fysica, naar een denkbeeldig experiment of misschien naar beide? Ik ben geneigd te concluderen dat het antwoord volgens de auteurs het tweede is — meer bepaald: het gedachte-experiment grijpt plaats in een logisch gedetermineerde en nog-verder geïdealiseerde wereld — aangezien ze eerder in hun stuk beweerd hebben dat het daadwerkelijk vouwen van een strook papier slechts voor een klein aantal recepten kan plaatsvinden.

Voor mij is er sprake van een geïdealiseerd proces, onder meer omdat de looppatronen in de opgavebundel abstractie lijken te maken van de lengtes van de rechte stukken, van de werkelijk gemaakte hoeken en van de dikte van de strook.

Verkennende vraag 1

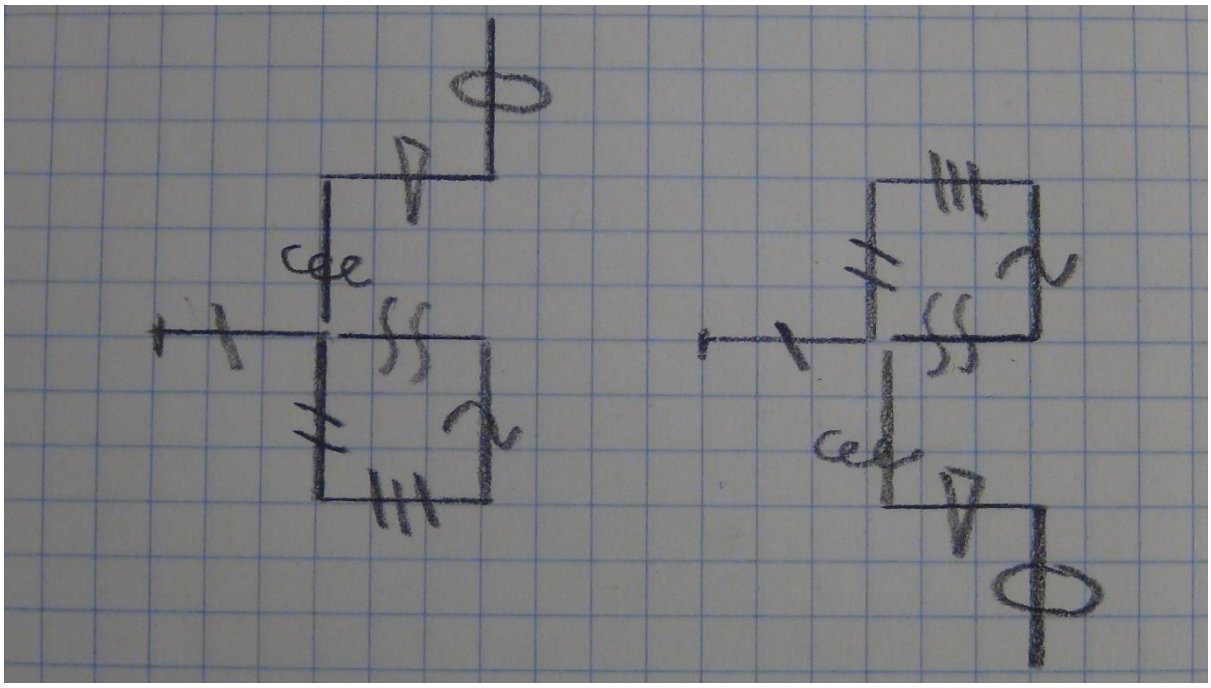
De vraag bestaat uit drie delen:

a) Er zijn acht mogelijkheden voor een vouwrecept met drie keer vouwen. Welke zijn dat?
b) Maak een overzicht voor drie keer vouwen, zoals hierboven is gegeven voor twee keer vouwen: de vouwrecepten en de bijhorende looppatronen.
c) Het zigzagpatroon dat [in de opgavebundel] is getekend [meer bepaald WWW maar dan met rechte hoeken] vind je niet als mogelijkheid bij drie keer vouwen. Dat had je ook wel op voorhand kunnen weten. Hoe dan?

De acht mogelijke vouwrecepten zijn:

lll	llr	lrl	lrr
rrr	rrl	rlr	rll

Mijn intuïtie zegt dat l en r op één of andere manier elkaars "tegenovergestelde" zijn, vandaar dat ik een tabel met vier kolommen presenteer: bijvoorbeeld, de "tegenpool" van llr is rrl. Deze intuïtie wordt grafisch op de volgende manier al deels bevestigd:



Het looppatroon links in beeld is dat van llr en rechts in beeld dat van rrl. De onzichtbare horizontale *x*-as is de symmetrieas.

De andere zes tekeningen laat ik achterwege.

Begin van chaotisch intermezzo.[3] Wat gebeurt er als we beide recepten llr en rrl op een of andere manier optellen? Wat als we de bijhorende patronen, zijnde $RLL\ L\ RRL$ en $LRR\ R\ LLR$, optellen? (De spaties in de letterreeksen heb ik enkel voor extra leesbaarheid toegevoegd.) Grafisch heffen de verticale componenten met dezelfde markering (in de bovenstaande tekening) elkaar op. Definiëren we de som $l + l$ van twee afzonderlijke recepten (namelijk l en l) als recept ll of eerder als recept l? Na enige reflectie kom ik tot het volgende voorlopig besluit:

- ε stelt een leeg vouwrecept voor
- Componentsgewijs:
  - $l + l = l$
  - $r + r = r$
  - $l + r = \varepsilon = r + l$

[3] Dit is een brainstormsessie: de formalisatie is niet helemaal correct maar wel al informatief. Hiermee geef ik Tall gelijk dat formalisatie hand in hand gaat met het bedrijven van zijn "conceptual embodiment" en/of "operational symbolism."

- Fysische interpretatie van $l + l = l$
  - Als je op een bepaalde plek op de strook langs links vouwt en daarna, op net dezelfde plek, nog een keer, dan verkrijg je hetzelfde effect door slechts een keer op die plek langs links te hebben gevouwen.
- Fysische interpretatie van $l + r = \varepsilon$
  - Als je op een bepaalde plek eerst links en dan rechts vouwt dan maak je de eerste vouwing ongedaan met de tweede: netto-effect is dat er niks is veranderd, vandaar: ε.
- Langs voor toevoegen:
  - We noteren lx als we instructie l langs voor wensen toe te voegen aan recept x
  - Idem voor rx
  - $\varepsilon x = x$
- Som van twee recepten … die niet even lang hoeven te zijn:
  - $\varepsilon + x = x = x + \varepsilon$
  - $ax + by = (a + b)(x + y)$ met $a, b \in \{\varepsilon, l, r\}$ …
  - …

Dus $llr + rll$ is dan gelijk aan het leeg recept ε. En ook de bijhorende looppatronen heffen elkaar op: $RLL\ L\ RRL + LRR\ R\ LLR = 0$. **Einde van chaotisch intermezzo.**

Dan rest er nog het derde deel van de vraag m.b.t. het zigzagpatroon. De looppatronen van ll en rr hebben elk een netto horizontale afstand van 0. De looppatronen van lr en rl hebben elk een netto verticale afstand van 0. Veronderstel nu dat het zigzagpatroon overeenkomt met recept xll met $x \in \{l, r\}$. (Een gelijkaardige redenering geldt voor xrr en xlr en xrl.) Een l of een r langs voor toevoegen aan recept ll verandert niks aan de lokale vorm van het patroon dat door recept ll gecreëerd wordt: er moet ergens lokaal in de horizontale richting een heen en weer beweging zijn. Die lokale eigenschap is nergens aanwezig in het zigzagpatroon. Dus kan het zigzagpatroon niet tot stand zijn gekomen door recept xll met $x \in \{l, r\}$ uit te voeren.

Begin van intermezzo. Mogen we nu besluiten dat we met een echte papierstrook en eender welk vouwrecept bestaande uit hoogstens drie letterinstructies — waarbij elke letter ofwel l ofwel r is — het zigzagpatroon niet kunnen verwezenlijken? (De veralgemening van lengte drie naar ‘eender welke lengte’ is overbodig om mijn punt te maken.) We kunnen dit besluit over de fysica trekken als we een vorm van *realisme* omarmen; dit besluit is echter minder vanzelfsprekend als we consequent een ontologisch onderscheid wensen te maken tussen de werkelijkheid enerzijds en de mathematica anderzijds. In de les

hebben we voortdurend over mathematische modellen en idealisaties van de werkelijkheid gesproken: we hebben ontologisch *dualisme* gepredikt en vanuit die optiek bekeken is het zonet geleverde onmogelijkheidsbewijs *misschien* een aanwijzing voor een fysische onmogelijkheid — meer dan dat kunnen we simpelweg niet concluderen. Ik ga hier in Deel 2 verder op in. **Einde van intermezzo.**

Verkennende vraag 2

De vraag bestaat uit twee delen:

a) *Hoeveel rechte stukken en hoeveel knikken heeft een looppatroon bij drie keer dubbelvouwen?*
b) *Hoeveel rechte stukken en hoeveel knikken heeft een looppatroon als je n keer vouwt ($n = 1,2,3,4,5, \ldots$)?*

Een looppatroon bij drie keer dubbelvouwen heeft 7 knikken en 8 stukken: zie ook de overeenkomende regel in de volgende tabel:

n	$K(n)$	$S(n)$
1	1	2
2	3	4
3	7	8
4	15	16
n	$2^n - 1$	2^n

Notatie:

- $K(n)$ is het aantal knikken na n keer vouwen
  - $K(1) = 1$
  - $K(n) = 2K(n-1) + 1$ met $n > 1$
- $S(n)$ is het aantal rechte stukken na n keer vouwen
  - $S(n) = K(n) + 1$ met $n > 0$

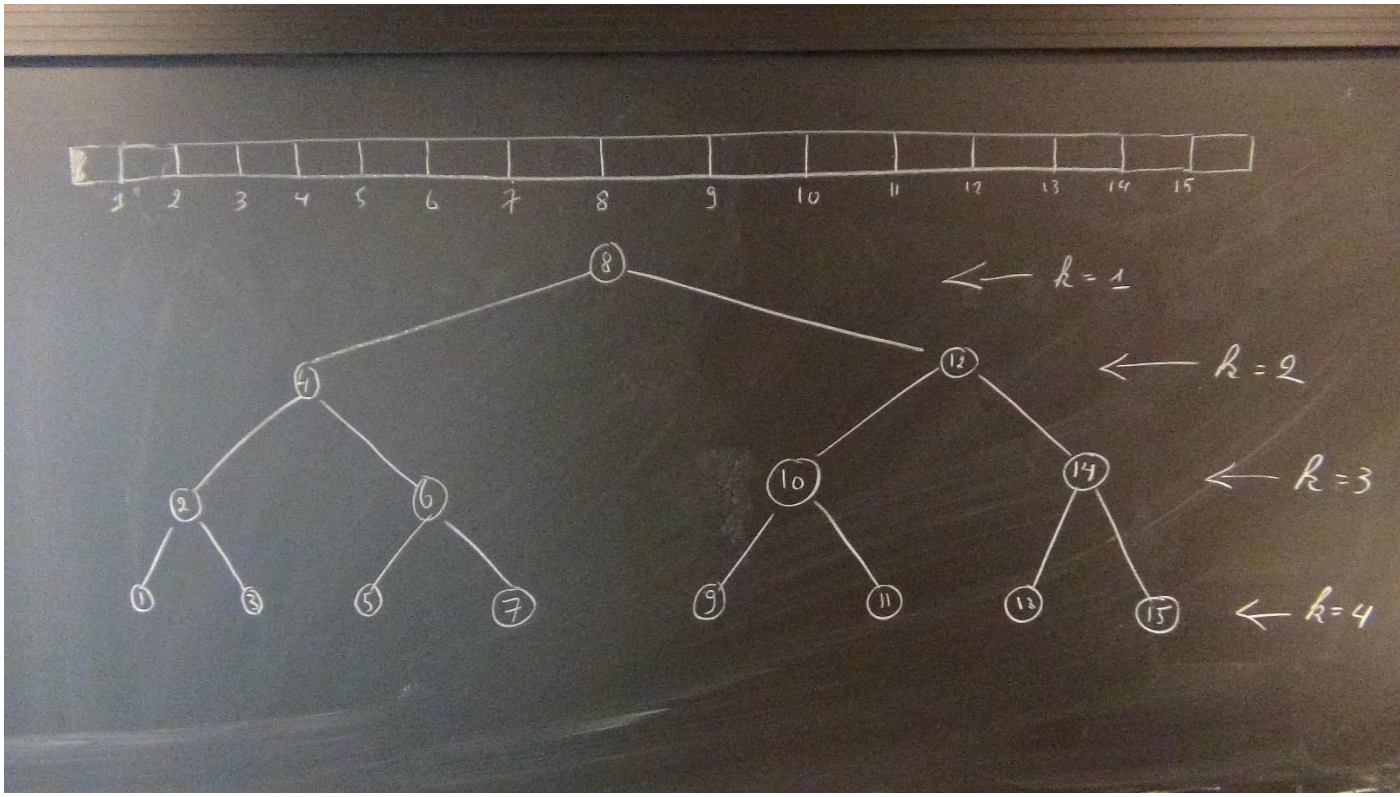
Verkennende vraag 3

a) *Op welke positie (bij welk nummer [zie hieronder, in het bovenste deel van de foto]) vind je het vouwlijntje dat hoort bij de eerste keer vouwen? En welke posities (nummers) horen bij de tweede keer, bij de derde keer en bij de vierde keer?*

Op elke positie komt een L of een R te staan, afhankelijk van het vouwrecept. Iemand heeft een looppatroon gemaakt, waarbij op de posities $2, 7, 8$ en 12 een R staat. Daarmee is het hele looppatroon terug te vinden!

b) *Bepaal het hele looppatroon (geef het rijtje R'en en L'en).*

c) Wat was het vouwrecept?



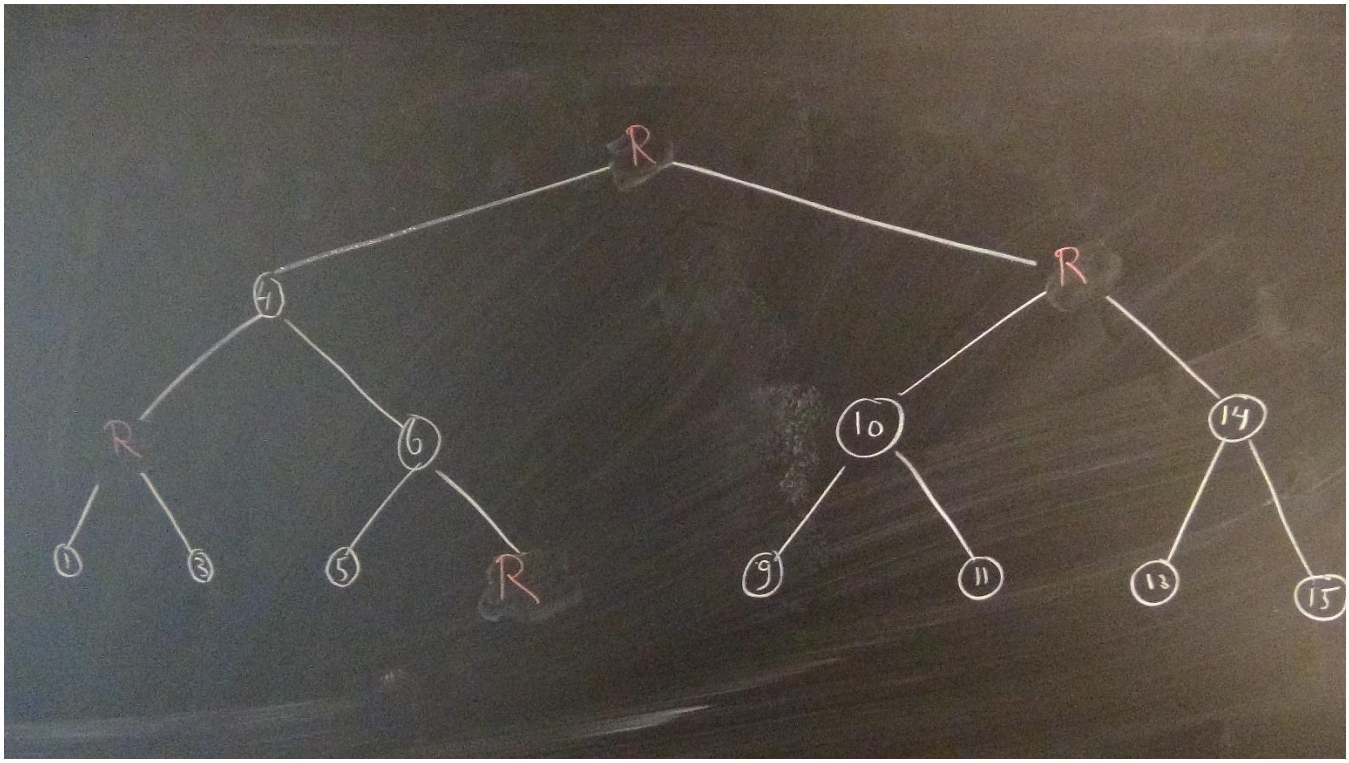
Het bovenste deel van de foto stel ik vervolgens (in het onderste deel van de foto) met een binaire boom voor, waarbij:

- k = het aantal keer vouwen
- n = het totaal aantal keer vouwen
- $1 \leq k \leq n$

In het lopend voorbeeld is $n = 4$ en varieert k dus van 1 tot en met 4. We interpreteren de boom op de volgende manier:

- De eerste rij in de boom bevat de positie 8 van de eerste vouwlijn ($k = 1$)
- De tweede rij in de boom bevat de posities 4 en 12 van de vouwlijnen bij de tweede keer vouwen ($k = 2$)
- …
- De laatste rij in de boom bevat de 2^{n-1} posities van de laatste vouwlijnen ($k = n = 4$)

Er is gegeven dat op de posities $2, 7, 8$ en 12 een R staat; zie de volgende foto. Nu zou het hele looppatroon (dat ik met een L/R-ingevulde binaire boom wens voor te stellen) terug te vinden zijn, alsook het vouwrecept.



We weten dat het vouwrecept lengte 4 heeft. Dus zijn er $2^4 = 16$ verschillende recepten. Dankzij het volgende intermezzo weten we dat precies één recept ons direct aanbelangt.

Begin van intermezzo. Is het mogelijk dat twee verschillende recepten, r' en r'', dezelfde ingevulde binaire boom opleveren? (Ik ga aantonen dat dit niet kan.) Het ligt voor de hand dat dit niet kan als het ene recept langer is dan het andere. Recepten r' en r'' zijn dus, als ze bestaan, verschillend maar even lang. Veronderstel bovendien dat:

- de eerste $m - 1$ letters van recept r' ook de eerste $m - 1$ letters van r'' zijn; als recepten r' en r'' geen eerste letter gemeen hebben, dan is $m = 1$
- letter $r'@m$ verschilt van letter $r''@m$, waarbij de notatie "$r'@m$" verwijst naar de m-de letter — gelezen van links naar rechts — in de letterreeks r'.

Ik wens recepten r' en r'' stapsgewijs uit te voeren op, respectievelijk, mijn eerste en mijn tweede strook papier.[4] Ik voer de eerste $m - 1$ letters van recept r' uit, alsook de eerste $m - 1$ letters van recept r''. Tot dusver is mijn "eerste looppatroon" identiek aan mijn "tweede looppatroon," waarbij een "looppatroon" en een "ingevulde binaire boom" als synoniemen fungeren. Veronderstel nu dat

[4] De "uitvoering" grijpt plaats in Talls mentale denkkader van "operational symbolism."

letters $r'@m$ en $r''@m$, respectievelijk, l en r zijn.[5] Dan zal, na uitvoering van l op mijn eerste strook en na uitvoering van r op mijn tweede strook, mijn eerste looppatroon verschillen van mijn tweede looppatroon. Aangezien alle andere instructies in recepten r' en r'' enkel tot meer vouwingen zullen leiden (en nooit tot het ongedaan maken van een vouwing) zullen beide looppatronen van elkaar blijven verschillen. De conclusie is dat eender welke twee verschillende recepten ook verschillende looppatronen opleveren. **Einde van intermezzo.**

Algemener verwoord: er bestaat een bijectie tussen vouwrecepten enerzijds en de ingevulde binaire bomen (van een nog-te-definiëren soort) anderzijds.

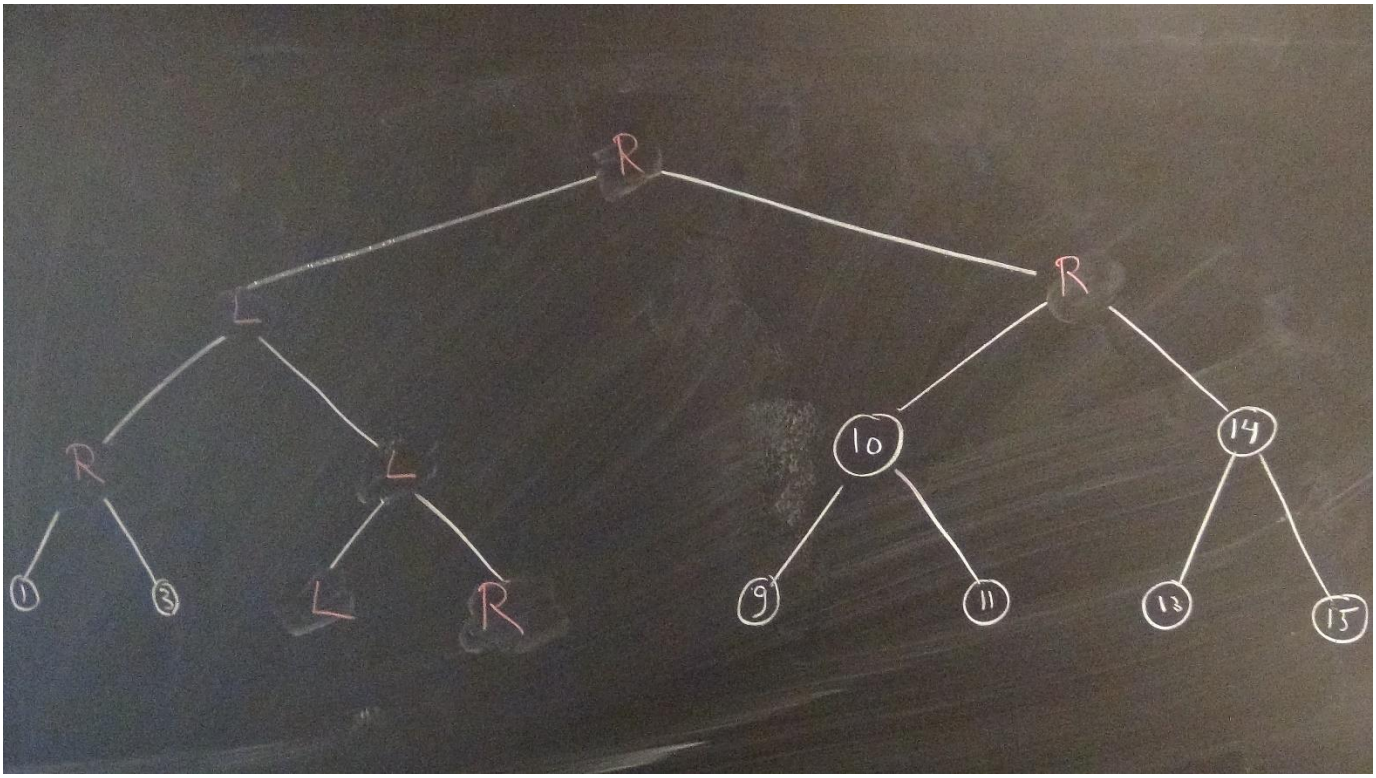
Enige reflectie over de fysische betekenis van "een vouwing na een vouwing" levert al enkele nieuwe inzichten op:

- Na k vouwingen van een strook papier, zal de daaropvolgende vouwing (met nummer $k+1$) elk knooppunt op niveau k in de boom twee "kinderknooppunten" opleveren op niveau $k+1$ in de inmiddels uitgebreide boom.
- Elk koppel van kinderen op niveau $k+1$ moet uit één broer (L) en één zus (R) bestaan; twee broers noch twee zussen zijn toegestaan.[6]

Deze bevindingen laten ons toe om de binaire boom als volgt verder in te vullen:

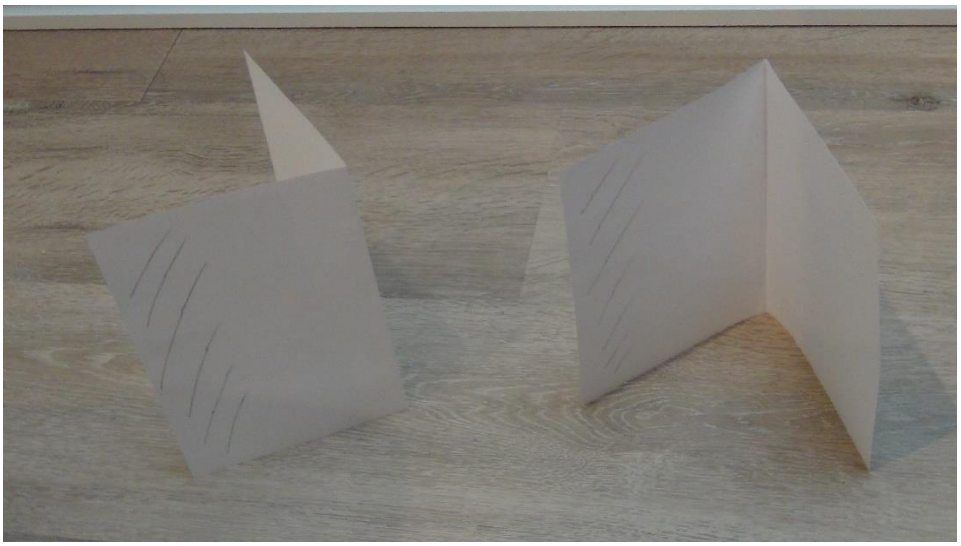
[5] De gemaakte veronderstellingen in mijn redeneringen doen geen afbreuk aan de gewenste algemeenheid van mijn betoog; ze zijn "without loss of generality."

[6] Enerzijds zou ik nu, in navolging van de latere Wittgenstein, kunnen beargumenteren dat ik mathematisch aan het modelleren ben: echte vouwingen van een strook papier worden vertaald en geïdealiseerd naar een binaire boom die bepaalde wiskundige eigenschappen bevat. Anderzijds kan een aanhanger van het *verklarend realisme*, of iemand die de jonge Wittgenstein met zijn *logical atomism* navolgt, volhouden dat de wiskundige eigenschappen van de binaire boom in het strookje papier vervat zitten.

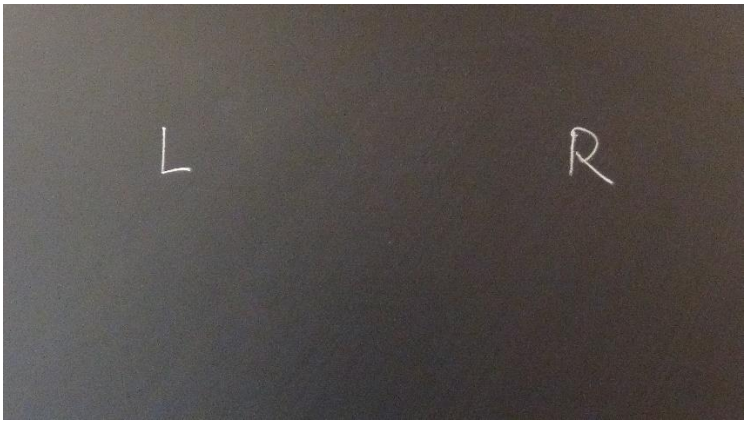


Begin van intermezzo. Er zijn te veel ingevulde binaire bomen en te weinig recepten opdat er een bijectie zou bestaan tussen eerstgenoemde en laatstgenoemde — tenzij we meer structuur aan het nog-te-definiëren begrip “ingevulde binaire boom” opleggen. Dat laatste ga ik nu ondernemen.

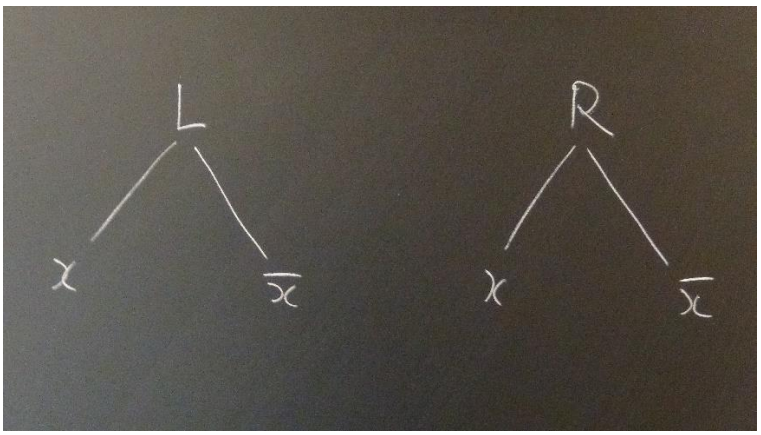
Beschouw een linker strook papier en een rechter strook papier:



Merk op dat de linker strook langs links is geplooid en de rechter strook langs rechts. Vandaar dat ik de fysische toestand als volgt symbolisch noteer:



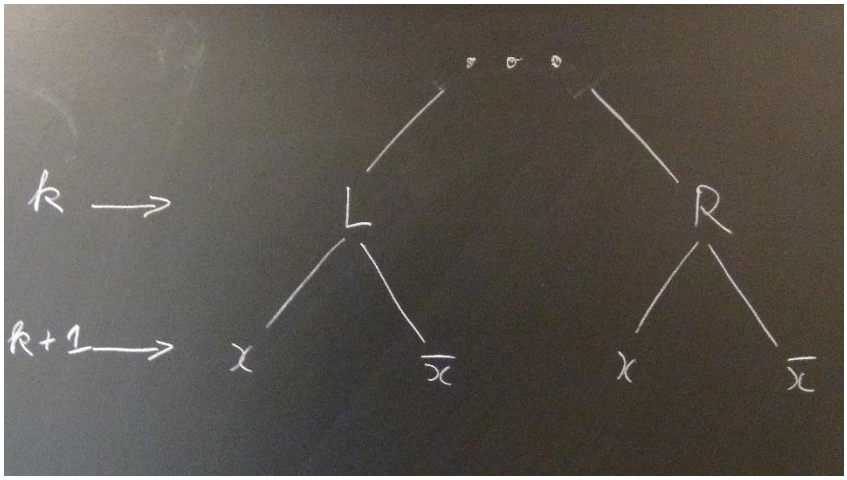
Beschouw nu een willekeurige vouwinstructie die we zowel op de opgevouwen linker strook als op de opgevouwen rechter strook willen uitvoeren. Dan zien we dat het bijkomend fysisch effect, wat de oriëntatie van de twee bijkomende knikken betreft, op beide stroken net hetzelfde zal zijn. Symbolisch verwoord ik dit inzicht als volgt:



Waarbij $x, \bar{x} \in \{L, R\}$ en $x = L$ als en slechts als $\bar{x} = R$.

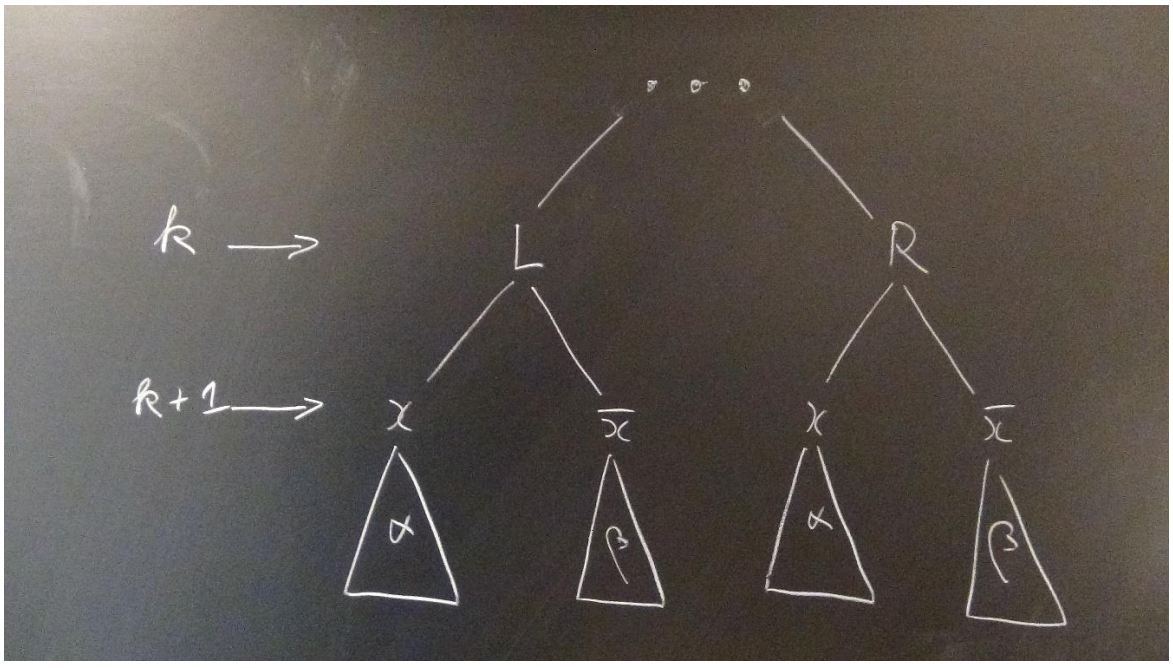
Bovendien maakt het niet uit of ik nu twee aparte stroken papier heb (zoals in de eerste foto in dit intermezzo) of dat mijn “linker strook” en “rechter strook” samen deel uitmaken van een groter geheel: namelijk een nog grotere strook papier. Vandaar de volgende symbolische veralgemening:[7]

[7] Ik ben geneigd dit deel van mijn relaas te koppelen aan Talls “conceptual embodiment.”



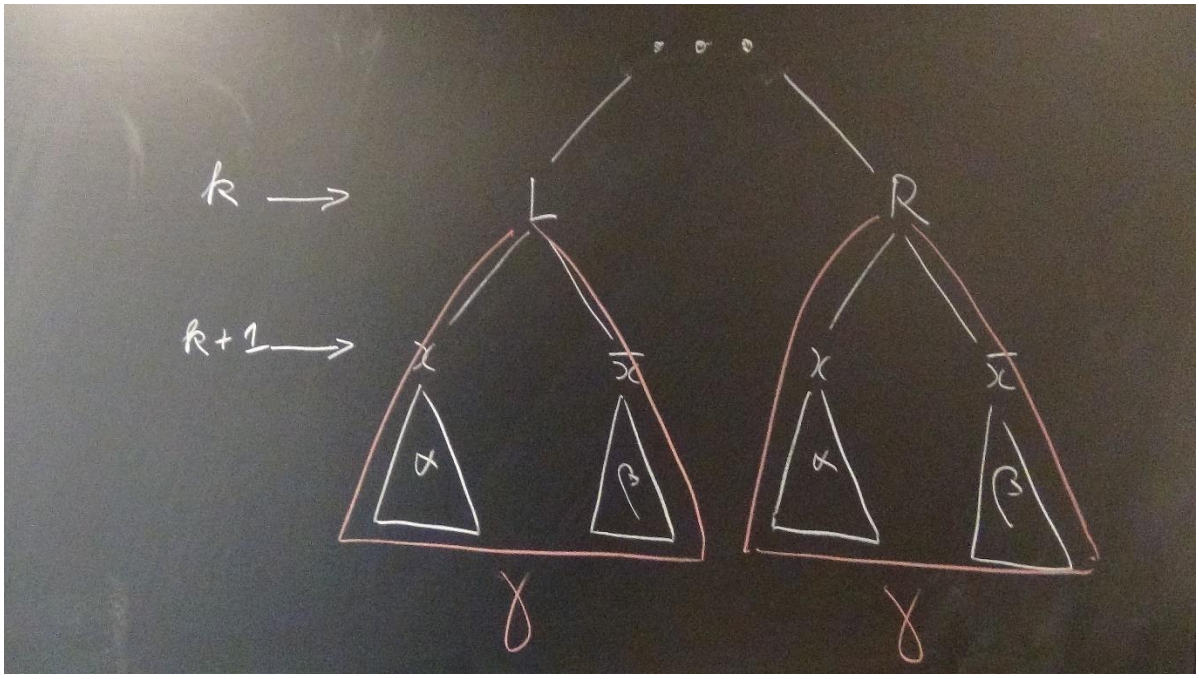
Merk op dat *k* een willekeurig gekozen natuurlijk getal voorstelt.

Nog algemener: beschouw, i.p.v. een willekeurige vouwinstructie, een willekeurige reeks van vouwinstructies die we zowel op de opgevouwen linker strook als op de opgevouwen rechter strook willen uitvoeren. Dan zien we in dat het bijkomend fysisch effect van de bijkomende knikken op beide stroken net hetzelfde zal zijn.[8] Symbolisch verwoord:



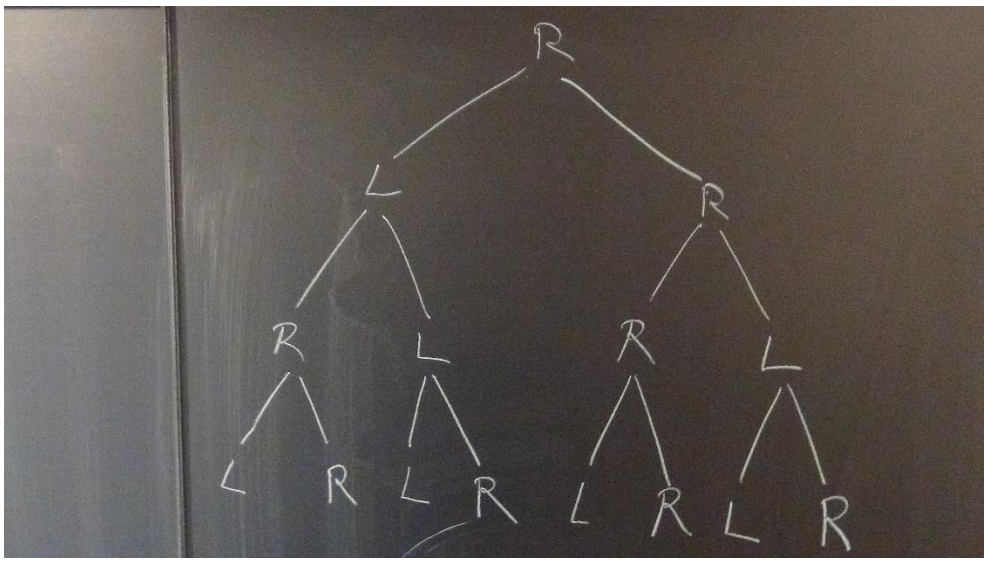
Vervolgens stellen we vast dat de linker subboom en de rechter subboom aan elkaar gelijk zijn:

[8] Ik maak abstractie van wat die reeks van instructies is; ik ben dus niet operationeel over meer dan twee instructies aan het redeneren. Bovendien ben ik mijn fysische inzichten aan het symboliseren: ik lever geen wiskundig bewijs maar wel een invariant van mijn gewenste boomdatastructuur.



Samengevat: gegeven een willekeurig looppatroon dat we op eenduidige wijze met een ingevulde binaire boom voorstellen en gegeven een willekeurig niveau k in die boom, dan is de linker subboom die op niveau $k+1$ begint gelijk aan de rechter subboom (die eveneens op niveau $k+1$ begint). **Einde van intermezzo.**

Bijgevolg kunnen we nu het gewenste looppatroon van verkennende vraag 3 volledig weergeven:



Het bijhorend vouwrecept is $rlrl$ en die verkrijgen we door de uiterst linker takken van boven naar onder af te lezen: $RLRL$. (Dit fysisch inzicht is

vanzelfsprekend.) M.a.w. de signatuur van een looppatroon is het uiterst linkse pad van boven naar beneden, en die signatuur is, op de keuze om met hoofdletters te schrijven na, het vouwrecept van de boom in kwestie.

Bijkomende (irrelevante) opmerkingen:

- De volledig ingevulde boom is afleidbaar van een volledig pad, dat van boven naar beneden loopt, en waarvan de knooppunten in de tekening aangeduid zijn.
- Bijgevolg is het vouwrecept van lengte *n* berekenbaar uit een pad van lengte *n* en het rangnummer van het pad in kwestie.
- Elk volledig pad door de boom (in het lopend voorbeeld) begint telkens met een R en voor de rest leveren al die paden gezamenlijk alle mogelijke combinaties op: $Rxyz$ met $x, y, z \in \{L, R\}$.

Verkennende vraag 4

We gaan uit van een vouwrecept met zes keer dubbelvouwen. Je hebt dan een looppatroon met 64 *stukjes en* 63 *knikken.*

a) Extra informatie: de eerste knik vanaf links in een R. Van welke van de andere 62 *knikken weet je nu zeker dat het een R of een L is?*
b) Nog meer informatie: het looppatroon begint met $RLLR$. Van hoeveel knikken kun je nu nog niet weten of ze R of L zijn?

We hebben 63 knikken of knooppunten in onze binaire boom die uit zes niveaus bestaat:

1. één knooppunt
2. twee knooppunten
3. vier
4. acht
5. zestien
6. tweeëndertig

De knoop uiterst links behoort tot niveau 6. Bijgevolg kunnen we alle andere 31 knooppunten op niveau 6 invullen: $RL\ RL\ \ldots RL$. (De redenen hiervoor zijn in de vorige oefening gegeven.)

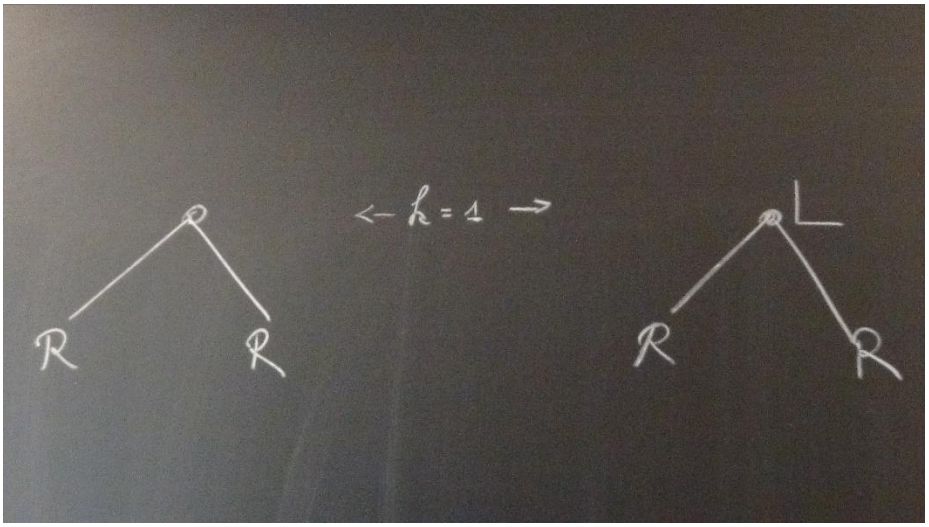
Verder weten we dat het looppatroon met $RLLR$ begint. Bijgevolg zijn alle knooppunten in lagen 6, 5 en 4 gekend. De zeven resterende knooppunten in lagen 1, 2 en 3 blijven onbekend.

Verkennende vraag 5

a) Waarom kan de figuur [die ik hier achterwege laat] niet het resultaat zijn van een vouwrecept?

b) Waarom kan het rijtje RLL R RRL L RLL R RRL nooit als looppatroon optreden?

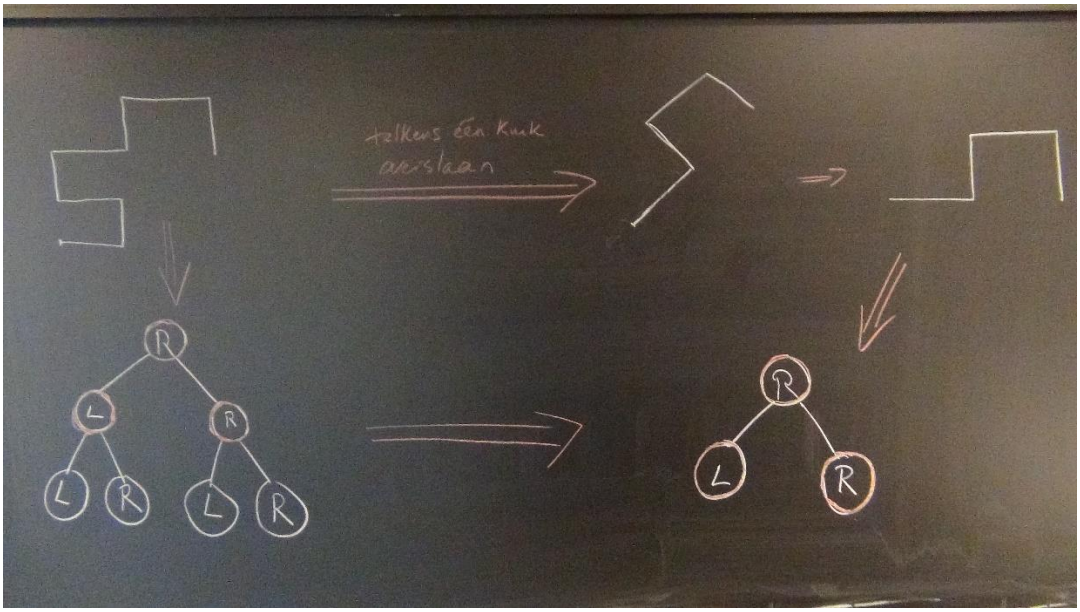
Deel *a)* resulteert in de tekening links onderaan en deel *b)* in de tekening rechts onderaan in beeld:



Een knooppunt waarvan de twee kinderen hetzelfde "geslacht" hebben (R en R) is niet in overeenstemming met de eigenschappen van ingevulde binaire bomen die eerder ter sprake zijn gekomen.

Verkennende vraag 6

Door telkens één knik over te slaan in het looppatroon in het linker bovenkwadrant van de volgende foto verkrijgen we het patroon in het rechter bovenkwadrant. Onderaan in het beeld wordt de bijhorende operatie die op de boomrepresentatie van een looppatroon plaatsvindt, voorgesteld: de bladeren van de boom worden afgesnoeid. M.a.w. het oorspronkelijk recept rll wordt ingekort tot rl.



Nu volgt verkennende vraag 6:

a) Het looppatroon in het linkerplaatje hoort bij het vouwrecept rll. Leg uit waarom het rechterplaatje ook een looppatroon is. Bij welk vouwrecept?
b) Er bestaat nog een ander looppatroon links dat ditzelfde looppatroon rechts oplevert. Welk looppatroon is dat?

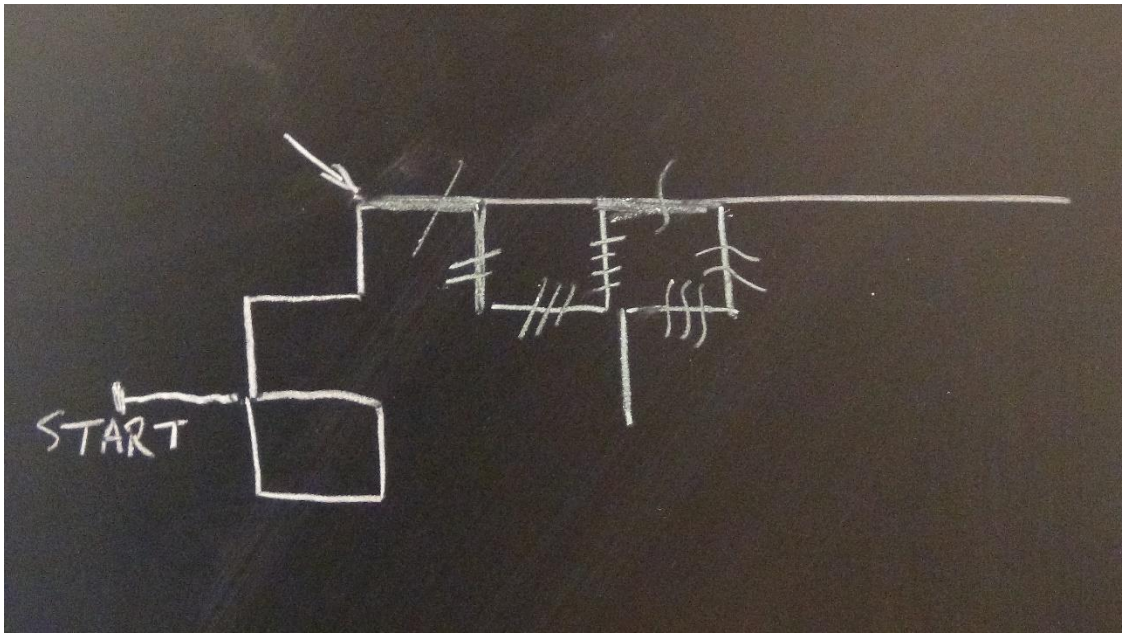
Het rechterplaatje is een looppatroon omdat het recept rl dat patroon oplevert. Een ander antwoord gaat (weliswaar nog steeds op informele wijze) als volgt: de bladeren van een ingevulde binaire boom afsnoeien resulteert in een andere ingevulde binaire boom (en dus in een looppatroon) want alle boom-eigenschappen die eerder aan bod kwamen blijven behouden na het snoeiwerk.

Als we de bladeren van de oorspronkelijke boom per koppel omwisselen (dus elk koppel *L R* wordt *R L*) dan verkrijgen we een andere boom (waarvan het vouwrecept rlr is) en die, na afsnoeien, dezelfde kortere boom oplevert.

Verkennende vraag 7

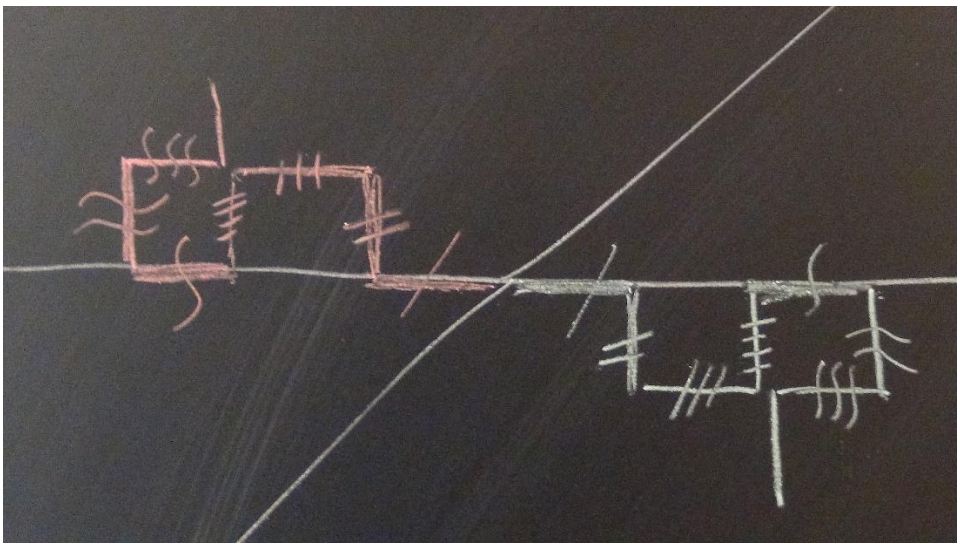
Het looppatroon dat [hieronder, deels in het wit en zonder markeringen en deels in het groen met markeringen] is getekend, hoort bij het vouwrecept $rllr$. [De pijl in de tekening wijst naar de middelste knik.]

a) Wat verandert er aan het looppatroon als je de eerste r van het vouwrecept vervangt door een l? Welke veranderingen zie je in de bijbehorende lettercode van het looppatroon?
b) Wat verandert er aan het oorspronkelijke looppatroon als je in het vouwrecept de r op de laatste plaats vervangt door een l? Welke veranderingen in de lettercode van het looppatroon zie je nu?



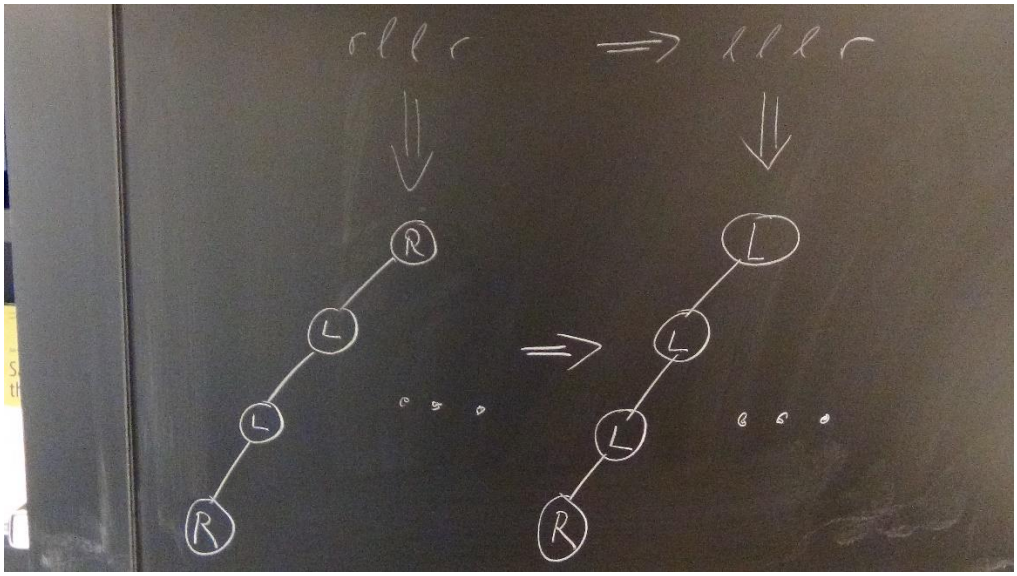
Als de eerste letter in het recept verandert (van r naar l) dan zal de middelste knik in het looppatroon omwisselen (van R naar L). Grafisch betekent dit het volgende:

- de eerste, witte helft van het looppatroon blijft onveranderd (en wordt hieronder niet weergegeven)
- de tweede, groene helft van het looppatroon (die hieronder nog eens wordt afgebeeld) wordt in het rode patroon getransformeerd

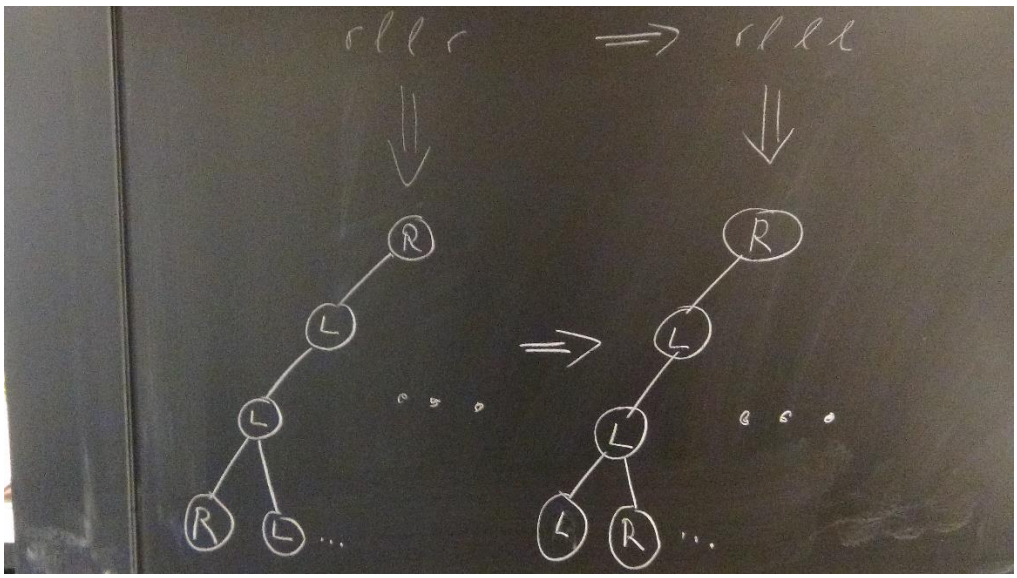


De horizontale x-as in de tekening is informatief. De bissectrice tussen die as en de onzichtbare y-as is eveneens nuttig om expliciet voor te stellen: het groene patroon wordt namelijk rond de bissectrice gespiegeld en zo verkrijgen we het rode patroon. Nogmaals spiegelen, geeft terug het oorspronkelijk groene patroon.

Symbolisch en a.d.h.v. recepten en ingevulde binaire bomen verkrijgen we het volgende plaatje:

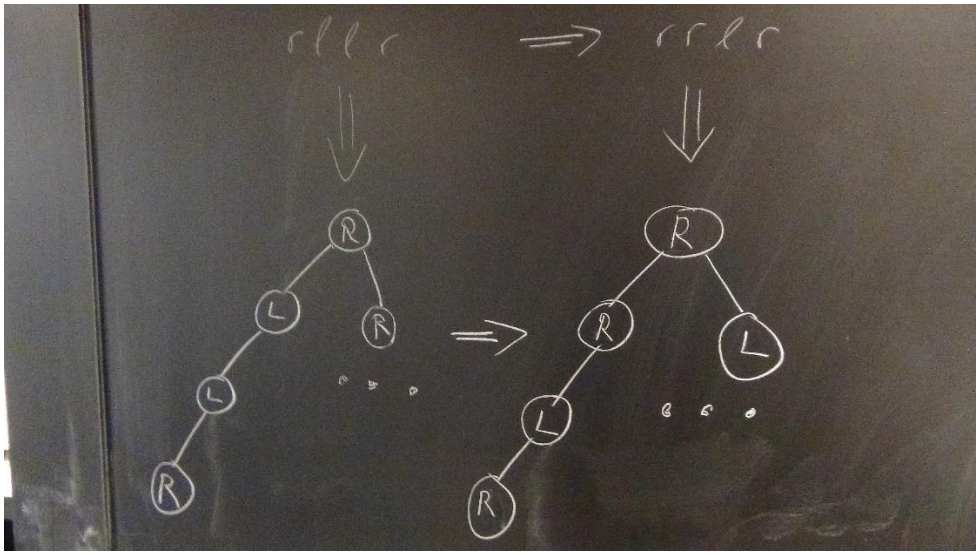


Als daarentegen de laatste letter in het recept veranderd wordt, dan hebben we de volgende situatie:



Elk (R, L) koppel in de onderste laag van de boom wordt getransformeerd naar een (L, R) koppel.

Als we noch de eerste noch de laatste letter maar wel de tweede letter in het recept $rllr$ veranderen, dan zien we alweer dat enkel het betreffende niveau in de boom gewijzigd wordt terwijl alle andere niveaus ongewijzigd blijven:



Het is niet moeilijk om deze wiskundige inzichten te staven a.d.h.v. een interpretatie van het fysisch vouwen van een strook papier.

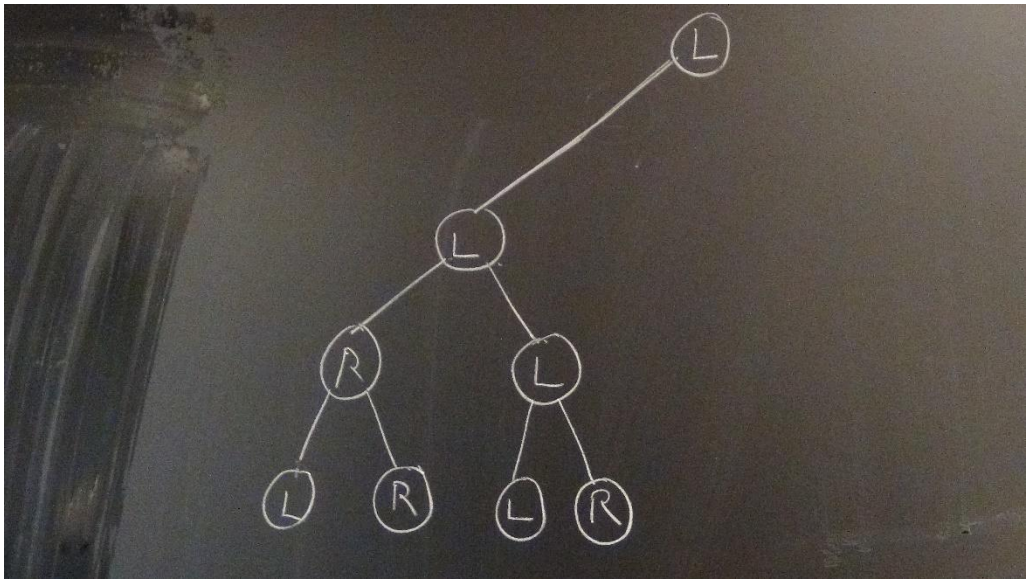
Verkennende vraag 8

Het looppatroon LRR L LLR L LRR R LLR is het resultaat van een vouwrecept met vier keer dubbelvouwen.

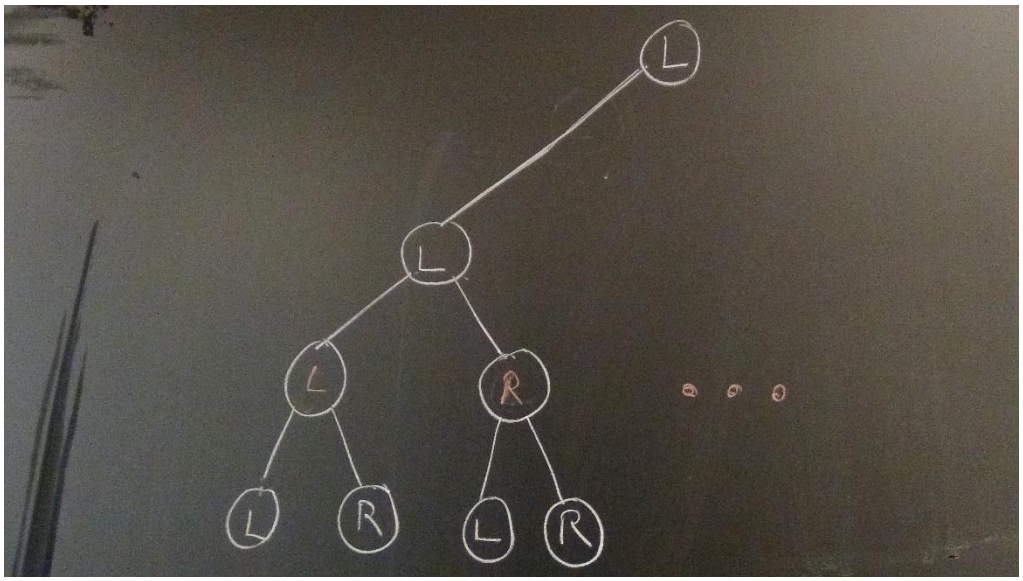
a) Er is een vouwrecept waarbij de R op de tweede positie een L is en er verder zoveel mogelijk letters hetzelfde blijven als in het gegeven looppatroon. Welke letters in het gegeven looppatroon moeten dan ook anders zijn, en welke verandering in het vouwrecept hoort daarbij?

b) Er is ook een vouwrecept waarbij de L op positie 4 van het gegeven looppatroon een R is en er verder zoveel mogelijk letters hetzelfde blijven. Wat kan je nu opmerken over de lettercode van het looppatroon en het vouwrecept?

De signatuur van het gegeven looppatroon is simpelweg het uiterst linkse pad in de volgende foto, ofwel het vouwrecept $llrl$. De foto bevat extra knooppunten om de bovenstaande vragen gemakkelijk te beantwoorden.

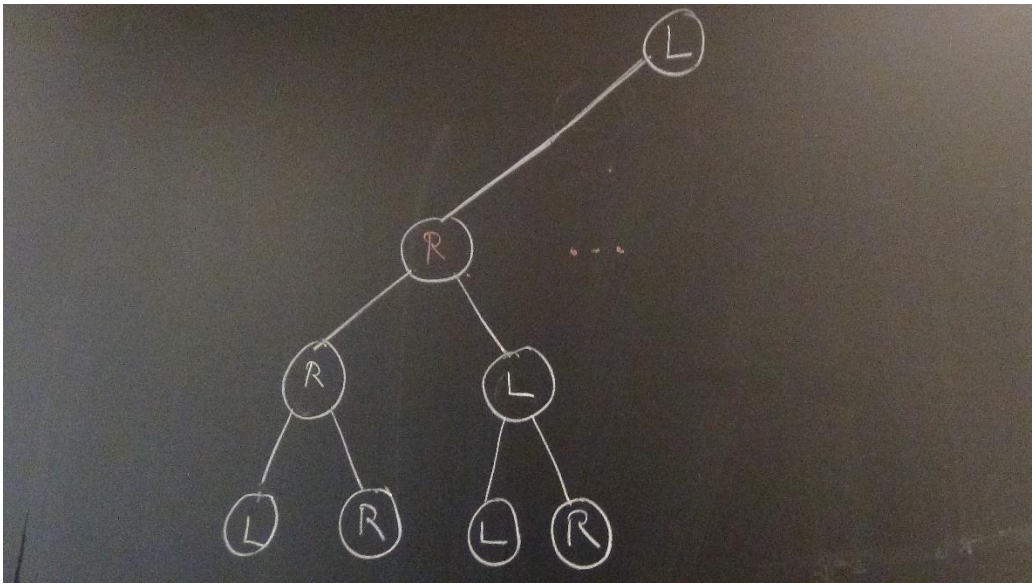


Als we hierboven de R op niveau 3 veranderen in een L, dan krijgen we de volgende ingevulde binaire boom:



M.a.w. elk (R, L) koppel op niveau 3 transformeert in een (L, R) koppel. Het bijhorend vouwrecept is alweer af te lezen uit het uiterst linkse pad: $llll$. Het bijhorend looptraject is: $LLR\ L\ LRR\ \ L\ \ LLR\ R\ LRR$.

De volgende foto geeft een aanzet om deel *b)* van de vraag te beantwoorden. Verdere details brengen geen extra inzichten op en laat ik achterwege.



Verkennende vraag 9

Deze vraag is eveneens triviaal geworden dankzij het vorig denkwerk.

Deel B: Complexe Eenvoud: Eigen Onderzoek

Eerste Bewering

- *Bewering 1: Voor elk looppatroon geldt dat het eerste en laatste rechte stuk loodrecht op elkaar staan.*
- *Vraag: Probeer een sluitende redenering te vinden waarbij blijkt dat dit altijd waar is.*

Aangezien het aantal knikken $K(n)$, na n keer vouwen, altijd oneven is, kan ik de uitspraak aldus vertalen naar de taal van mijn ingevulde binaire bomen:

- Voor elke ingevulde binaire boom geldt dat het eerste en laatste blad van "geslacht" verschillen. (Een blad bevindt zich per definitie helemaal onderaan in de boom.)

Nu leg ik uit waarom deze formulering inderdaad waar is:

> $S(n)$ is het aantal rechte stukken na n keer vouwen en is even. Dus is de helft van $S(n)$ eveneens even.[9] Dat getal stel het totaal aantal bladeren van de boom voor. De bladeren wisselen van "geslacht" en dus van L naar R of omgekeerd. Bijgevolg is het geslacht van het eerste blad altijd verschillend van het geslacht van het laatste blad.

[9] Tenzij $n = 1$. In dat geval is per direct duidelijk dat de oorspronkelijke uitspraak steek houdt.

Tweede Bewering

- *Bewering 2: Bij een gegeven vouwrecept kun je van elke knik van het bijhorende looppatroon voorspellen of hij L(inksom) of R(echtsom) is.*
- *Vraag: Hoe kun je bij het vouwrecept rrrlrrrlr voorspellen wat voor soort knik (R of L) op positie* 16 *staat?*

De bewering is bizar geformuleerd aangezien een "recept" natuurlijk toelaat om een voorspelling te maken, meer bepaald door het recept (louter wiskundig) uit te voeren. Of bedoelt men met "voorspellen" iets wat niet overeenkomt met het volledig wiskundig uitvoeren van een recept? Vermoedelijk wel.[10] Ook dan stel ik voor om met een boomstructuur te werken. Het gegeven vouwrecept drukt de letters op het uiterst linkse pad van de boom uit. Vertrek van daaruit om vervolgens "positie 16" in te vullen zonder alle andere knooppunten in de boom een label te geven. Maak gebruik van de boomeigenschappen die al eerder aan bod zijn gekomen. De rest laat ik achterwege.

Derde Bewering

- *Bewering 3: Bij een gegeven looppatroon kun je altijd achterhalen welk vouwrecept daarbij hoort.*
- *Vraag: Kun je een algemene methode geven waarmee je vanuit een gegeven looppatroon snel het bijbehorende vouwrecept kunt vinden?*

Deze materie heb ik al besproken, weliswaar dankzij het snel introduceren van een boomdatastructuur. Ik ben benieuwd naar de werkwijze van de leerlingen, vermoedelijk hebben ze dit conceptueel hulpmiddel niet benut.

De "verdere suggesties" heb ik diagonaal doorgenomen. Ik ben van mening dat ik deze onderzoeksmissies relatief gemakkelijk met mijn boomdatastructuur kan volbrengen.

Deel 1: Hoe ben ik bij de beoordeling tewerk gegaan?

Eerst en vooral heb ik de meeste oefeningen zelf gemaakt (zie Deel 0). Vervolgens heb ik elk van de drie ingeleverde werkstukken (*A*, *B* en *C*) voor een eerste keer diagonaal doorgenomen. Mijn algemene indruk verwoord ik op de volgende manier:

[10] Bij nader inzien stel ik alweer vast dat de opdrachtgevers, zoals vele academici en onderzoekers in de Westerse wereld, geen consequent onderscheid maken tussen een recept dat in de fysische wereld dient uitgevoerd worden en een mathematisch recept, oftewel tussen een fysisch proces en een mathematisch proces. Dit onderwerp komt in Deel 3 uitgebreider aan bod.

Het derde werkstuk leest vlotter dan het tweede, wat dan weer beter geschreven is dan het eerste stuk. Dit is voornamelijk te danken aan volzinnen, een leesbaar font en een conceptueel denkkader dat duidelijk naar voren komt. Alle drie de werkstukken bevatten wel ‘dt’-fouten.

Geen enkel werkstuk maakt gebruik van een boomdatastructuur of iets gelijkaardigs. Dit was te verwachten. Het derde stuk doet wel — al dan niet foutloos — een beroep op rekenkundige rijen.

Ook niet onverwacht is dat geen enkel stuk uitgebreid verbanden legt tussen de wiskundige bevindingen (enerzijds) en de fysica van het plooien van een werkelijke papierstrook (anderzijds). Net zoals in de opgavebundel is er nergens expliciet sprake van het mathematisch modelleren van een vouwproces. Zie Deel 3 voor een verdere toelichting.

Om naar een quotering over te gaan zal ik dus op een heel andere manier te werk moeten gaan dan in Deel 0. Het is niet ondenkbaar dat, ondanks de slordigheden, het eerste werkstuk toch hoog scoort. De geschiedenis van de wiskunde laat namelijk zien dat wiskundige bekwaamheid en nonchalance best samen kunnen gaan.

Deel A

De bedoeling hier is om een algemene indruk te krijgen en pas in Deel B bepaalde wiskundige redeneringen van de leerlingen in meer detail te analyseren. Als ik een luie houding aanneem bij het beoordelen van verkennende vraag 1, dan zal ik die houding voor alle drie de werkstukken aanhouden. (Bijvoorbeeld: in de eerste vraag is er sprake van acht verschillende recepten en ik zal slechts twee ervan per werkstuk beoordelen maar dan wel telkens dezelfde twee.) Bovendien zal ik de drie ingeleverde antwoorden op vraag 1 eerst doornemen alvorens over te gaan naar vraag 2, enz. Het is ook niet ondenkbaar dat ik een bepaald antwoord verkeerd interpreteer: de redenering achter het antwoord op vraag 1C in Werkstuk *A* lijkt in eerste instantie verkeerd te zijn, minder verkeerd in tweede instantie en toch onjuist in derde instantie. Al hebben de auteurs van het stuk het misschien juist voor, ik geraak er niet uit binnen de tijdslimiet die ik mezelf opleg. De remedie is om meerdere wiskundigen het betreffende stuk te laten beoordelen en/of een mondelinge toelichting van de leerlingen te voorzien.

Ik presenteer simpelweg een tabel bestaande uit kolommen *A*, *B* en *C* die de drie werkstukken voorstellen, en negen rijen: één rij per verkennende vraag. (Om de leesbaarheid te verhogen, laat ik slechts vier horizontale lijnen in de tabel zien.) Ik beoordeel elk antwoord met één van de drie tekens $-$, $+$ en $++$ voor, respectievelijk, ‘onvoldoende, ‘voldoende’ en ‘zeer goed’. In principe kan een

antwoord correct zijn en toch een "−" verdienen of fout zijn maar toch een "+ +" score krijgen. Een korte toelichting volgt na het geven van de ingevulde tabel.

Addendum. Soms wordt een vraag of een onderdeel ervan niet beantwoord. Dit is niet per se problematisch. Ik stel deze situatie met een vraagteken voor tenzij ik toch een van de andere tekens verkies.

A	*B*	*C*
−	?	+ +
+	+	+ +
+ +	+ +	+ +
−	+ +	+ +
+ +	+ +	?
+	+	+ +
+	+	+ +
+ +	+ +	+ +
+ +	+ +	+ +

- Een toelichting bij de antwoorden van vraag 6:
    - Groep *A* krijgt slechts een + score omdat de groep minder reductionistisch redeneert dan Groep *C*. De leden van Groep *A* grijpen terug naar de fysische handeling van het vouwen. Ze schrijven: "Omdat je het patroon netjes terug kan vouwen in de oorspronkelijke vorm, kan je zeggen dat het een juist looppatroon is." Deze uitspraak doet een beroep op de volledige complexiteit van het gegeven looppatroon: er wordt niet lokaal maar globaal op operationele wijze geredeneerd. Deze aanpak zal ongetwijfeld tot vergissingen leiden als het gegeven patroon ingewikkelder wordt. Anders geformuleerd: het antwoord van Groep *A* is niet fout maar is voor mij, persoonlijk, minder overtuigend dan het mathematisch antwoord van Groep *C*.
    - Groep *B* redeneert wel meer wiskundig (en eerder statisch dan operationeel). Ze schrijven: "De posities hebben de goede letters." Helaas geven ze, wellicht per ongeluk, een verkeerd antwoord: ze noteren $rllr$ i.p.v. rlr.
    - Groep *C* redeneert wiskundig, zowel operationeel als statisch, en doet me denken aan het *procept* begrip van Tall. Het operationeel redeneren is lokaal aangezien er enkel een contrast wordt gemaakt tussen een vouw meer of minder. In de redenering wordt er geen *direct* beroep gedaan op *alle* vouwingen.

- Toelichting bij vraag 12: ik heb niet bij elke groep een antwoord gevonden maar ik ben ervan overtuigd dat iedereen deze vraag correct kan beantwoorden.

Deel B

De kwantiteit interesseert me minder dan de kwaliteit die elke groep leerlingen met haar werkstuk heeft geleverd. Als een groep drie onderzoeksvragen oplost en slechts één ervan van hoge kwaliteit is, dan is dit niet per se slechter dan een groep die slechts één onderzoeksvraag van even hoge kwaliteit heeft opgelost. Dat is althans mijn uitgangspunt.

Ik ben dus op zoek naar de kers op de taart in elk werkstuk en ben niet van plan *alles* nauwgezet te bestuderen. Ik mag er tenslotte van uitgaan dat ik de beste drie werkstukken aan het beoordelen ben. Bovendien heb ik t.g.v. het vorig deel een lichte voorkeur gekregen voor Groep *C*. Ik begin dus niet zonder preferentie aan mijn verbeterwerk.

Startend met werkstuk *C*, die groep heeft wat zij "onderzoeksvraag 2" noemen op zeer elegante wijze opgelost a.d.h.v. een inductiebewijs en de stelling van Pythagoras. Ze hebben ook op de verschillende onderdelen van hun "onderzoeksvraag 3" correct geantwoord maar telkens zonder voldoende detaillering laat staan een formeel bewijs te geven (misschien wegens tijdsgebrek). Strikt genomen is hun bijdrage aan onderzoeksvraag 3 onvoldoende, al staat het voor mij buiten kijf dat ze deze materie zeer goed begrijpen dankzij het conceptueel vermogen dat ze in Deel A hebben ontwikkeld.

Vervolgens ga ik over naar werkstuk *B*. Groep *B* heeft enkel werk gemaakt van wat in de vorige alinea "onderzoeksvraag 2" heet. Hun inzichten lijken te kloppen maar hun betoog is pagina's lang en bevat geen inductie*bewijs* waardoor mijn voorkeur voor Groep *C* behouden blijft.

Groep *A* heeft met werkstuk *A* commentaar geleverd op vijf onderzoeks-onderwerpen. Hun "Suggestie 1" leest tien keer vlotter dan hun antwoorden op de verkenningsvragen en bevat een geometrische argumentatie die steek houdt. Enerzijds ontbreekt er voor mij persoonlijk een bewijs. Anderzijds stel ik vast dat de opdracht *niet* om een bewijs *an sich* vraagt.[11] Groep *A* beantwoordt "Suggestie 2" op een slordige manier maar de essentie heeft ze wel degelijk onder de knie. Ze beantwoordt "Suggestie 3" op een veel te gedetailleerde, combinatorische wijze, in tegenstelling tot de korte aanpak van Groep *C* die ik persoonlijk meer

[11] Naïef uitgedrukt, ik vermoed dat Groep *A* voornamelijk uit intuïtionisten en meetkundigen bestaat terwijl de leden van Groep *C* eerder formalisten (in spe) zijn.

verhelderend blijf vinden. Maar in tegenstelling tot Groep *C* maakt Groep *A* ook naar behoren werk van de opdracht over symmetrieën.

Mijn voorlopig besluit is om groepen *A* en *C* op een gedeelde eerste plaats te zetten. Groep *A* heeft meer opdrachten vervuld maar Groep *C* heeft meer tijd gestoken in een conceptuele opbouw waardoor de resterende opdrachten zonder twijfel gemakkelijk door hen hadden kunnen opgelost worden als ze iets meer tijd hadden gekregen. Groep *B* was de minste van de drie. Rekening houdend met de tabel en de bijkomende toelichtingen in het vorig deel, kom ik tot de volgende, finale rangschikking:

1. Groep *C*
2. Groep *A*
3. Groep *B*

Deel 2: Een koppeling maken met de onderzoekscompetentie

In hoeverre kan deze Wiskunde-B casus bijdragen aan het werken van de eindtermen rond onderzoekscompetentie? Geïnspireerd door het Uitwiskeling-verslag "Kleine opdrachten, grote vaardigheden: onderzoekscompetenties van *1* tot *6*" is mijn antwoord rechttoe rechtaan:

> De wiskundeleraar doorloopt de Wiskunde-B casus van opdracht tot opdracht en geeft (bijvoorbeeld wekelijks) terugkoppeling aan zijn leerlingen. De leraar doet continu een beroep op:
>
> - de uiteenzetting die ik in Deel 0 heb voorzien
> - een of meerdere reeds beoordeelde oplossingen waaronder werkstukken *A* en *C*

De leerkracht tilt de conceptuele vaardigheden van zijn leerlingen naar een hoger niveau door expliciet met een boomdatastructuur en/of met de meetkundige inzichten die in werkstuk *A* tentoon werden gespreid, te werken.

Vier bijkomende beschouwingen formuleer ik hieronder:

- In Deel 0 wordt er van concrete bevindingen naar invarianten (van de binaire boom) gewerkt. De leerlingen maken deze conceptuele overgangen in grote mate zelf. Na elke overgang schrijft de leraar een zorgvuldig antwoord op het bord (of werkt hij via smartschool).
- De casus laat ook differentiatie toe: de formele intermezzo's en bewijzen uit het ongerijmde in Deel 0 dienen voor de formalisten in spe, terwijl de getekende looptrajecten en meetkundige redeneringen (zie vooral werkstuk *A*) dan weer voor een andere deelpopulatie van leerlingen kan dienen.

- Idealiter wordt er ook met een informatica- en filosofieleraar samengewerkt omwille van het programmeerbaar, respectievelijk, filosofisch karakter van de casus.[12] Deze specialisaties komen straks ter sprake.
- Leerlingen dienen, ongeacht hun gekozen specialisatie, een eindverslag in te dienen dat vervolgens door een leraar Nederlands zal verbeterd worden.[13] De talen Frans en Engels zouden ook in aanmerking kunnen komen mits de omkadering zich hiertoe leent.

Zolang *Le Grand Projet* loopt, zullen leerlingen, leerkrachten, ouders en de betrokken leden van de directie met een brede glimlach door het leven stappen.

Toegepaste en theoretische informatica

Door een onderscheid te maken tussen het vouwproces en het bijhorende looptraject wordt er doorheen de casus regelmatig — zowel door de opdrachtgevers als de leerlingen — met het *procept* begrip van David Tall gewerkt.[14] Men zou in een nabespreking hier met leergierige jongeren dieper kunnen op ingaan. Details laat ik achterwege. Ook de informatica berust op het *proceptueel* redeneren zoals ik hieronder toelicht.

In Deel 0 heb ik een boomdatastructuur verkozen boven een lange reeks van letters en dit dankzij mijn universitaire studies in de computerwetenschappen. Ik ben van mening dat leerlingen baat zullen hebben bij een specialisatie waarin de boomdatastructuur in een object-georiënteerde taal dient geprogrammeerd te worden. In samenspraak met de informaticaleraar wordt bij voorbaat alle andere software met een eenvoudige programmeeromgeving voorzien.

In dit programmeerproject bevat de klasse “papierstrook” een aantal processen die op elke objectinstantie ervan kunnen uitgevoerd worden, waaronder:

- $vouw_dubbel$
- $vouw_dubbel\ (n\colon Nat)$
- $toon_looptraject$

---

[12] De “filosofieleraar” kan vervangen worden door een professionele filosoof wiens becommentariëring online te vinden is.

[13] In het Uitwiskeling stuk staat op pagina 40 dat de “we-vorm” en “niet de ik-vorm” dient gebruikt te worden “wanneer je de ‘lezer’ meeneemt in een redenering.” Dit advies is prima voor leerlingen maar is ook in tegenspraak met wat ik van Jean-Luc Doumont heb geleerd: https://www.principiae.be/X0101.php

[14] David Tall, *How Humans Learn to Think Mathematically*, Cambridge University Press, 2013. Maar zie ook hoofdstukken 1 en 2 in: Paul Drijvers, Anne van Streun, Bert Zwaneveld (Red.), *Handboek wiskundedidactiek*, Epsilon Uitgaven, 2021.

- *toon_boomstructuur*

Achter de schermen onderhouden (d.w.z. implementeren) de leerlingen een binaire boom als datastructuur in overeenstemming met de invarianten die al deels in Deel 0 ter sprake zijn gekomen. Bijgevolg zullen de leerlingen zowel operationeel als functioneel leren redeneren en programmeren. Zo maken ze kennis met de crux van de informatica, namelijk de dualiteit tussen proces en object.[15]

Gelijkaardige opmerkingen gelden ook voor de theoretische informatica. Door een papierstrook meermaals dubbel te vouwen, creëert men aparte vakjes (namelijk de "rechte stukken" in Deel 0) waarin een 0 of 1 kan worden weggeschreven. Op deze wijze kan men de berekening van een turingmachine nabootsen, waarbij een turingmachine een proceptuele formalisatie van het begrip *algoritme* is. In deze formalisatie wordt een beroep gedaan op een oneindig lange papierband waarop bits kunnen weggeschreven en weggeveegd worden. Het wegvegen is echter theoretisch overbodig en kunnen we bijgevolg buiten beschouwing laten.

Het nabootsen van een turingmachine a.d.h.v. de bovenvermelde "papierstrook" klasse kan eveneens in een object-georiënteerde taal geprogrammeerd worden. Dit betekent dan dat de papierstrook een willekeurig aantal keer moet kunnen dubbelgevouwen geworden: de geïmplementeerde bandruimte moet te allen tijde kunnen uitgebreid worden opdat het werkgeheugen van de algoritmische berekening nooit 'te klein' zou worden. Hier maken we een onderscheid tussen potentiële en afgewerkte oneindigheid, wat alweer onder de noemer 'operationeel versus functioneel redeneren' valt. De gedetailleerde manier waarop de bits op de papierstrook dienen genoteerd en beheerd te worden licht ik niet verder toe.

Bijgevolg krijgen de leerlingen een inleiding in zowel de toegepaste informatica als in de abstractere wiskunde van de berekenbaarheidstheorie. Vervolgens kunnen historische onenigheden over potentiële en afgewerkte oneindigheden aan bod komen, alsook een Cantoriaans diagonaalargument m.b.t. papierstroken en vouwrecepten. Dit is boeiende leerstof die ik hier niet verder bespreek. Gerelateerd aan deze onderwerpen zijn de filosofische zienswijzen van de jongere en de oudere Wittgenstein. Beide zienswijzen komen hieronder in grove lijnen

[15] Orit Hazzan, Koby Mike, "The Process-Object Duality in Computer Science and Data Science Education", Blog@CACM: https://cacm.acm.org/blogs/blog-cacm/266233-the-process-object-duality-in-computer-science-and-data-science-education/fulltext

aan bod; een bespreking van de geschriften van Wittgenstein laat ik volledig achterwege.

De jongere Wittgenstein

Door in Deel 0 experimenten met het vouwen van een strook papier uit te voeren, heb ik in zekere zin horizontaal gemathematiseerd maar dan wel zonder het begrip "model" expliciet in de mond te nemen. In overeenstemming met de slides van Thema 7 (van het vak "Vakdidactiek Wiskunde") houdt modelleren in dat men een niet-wiskundig probleem omzet naar een mathematisch model. Het vouwen van een strook papier lijkt echter al mathematisch van aard te zijn. Enerzijds ben ik dan ook de mening toegedaan dat de Wiskunde-B casus eerder gekozen is "om bepaalde wiskunde te behandelen in plaats van een interessant probleem op te lossen."[16] Anderzijds is hij net uitermate geschikt om filosofische, STEM-gerelateerde nuances m.b.t. het modelleren aan te brengen.

De kracht van de zuivere wiskunde wordt op pagina 3 in de opgavebundel op de volgende manier geïnsinueerd:

> Het doel van deze opdracht is dat je de patronen kunt verklaren en zelfs (zonder ze echt te vouwen) kunt voorspellen. Niet alleen voor de patronen die je zelf hebt gevouwen, maar ook voor patronen die je zou krijgen na bijvoorbeeld 10 keer vouwen. En dat kun je echt niet meer met een strookje papier uitvoeren!

Het citaat suggereert dat de te-vinden wiskundige bevindingen tot inzichten over de fysica zullen leiden, meer bepaald inzichten die we niet op manuele wijze (met een strook papier en een paar handen) kunnen bemachtigen. Het uitroepteken en de bijhorende tekst in het vorig citaat kunnen verder op verschillende manieren geïnterpreteerd worden naargelang de filosofische insteek van de lezer. Ik zal slechts twee filosofische interpretaties verder bespreken: het verklarend realisme versus het dualisme.[17]

---

[16] Geciteerd uit pagina 260 in: Paul Drijvers, Anne van Streun, Bert Zwaneveld (Red.), *Handboek wiskundedidactiek*, Epsilon Uitgaven, 2021. Mijn mening staat waarschijnlijk haaks op die van de opdrachtgevers; ik vermoed dat zij het probleem *an sich* wel interessant vinden, wellicht omdat er weinig context bij komt kijken.

[17] Mijn persoonlijke interesse gaat echter uit naar het idealisme van Bernardo Kastrup in navolging van toonaangevende astronomen uit de vorige eeuw, een onderwerp dat ik hier niet verder bespreek al vermeld ik er wel even bij dat Alan Turings eigen filosofie hier sterk bij aanleunde.

Aanhangers van het *verklarend realisme* zijn van mening dat allerlei wiskundige eigenschappen (inclusief de eigenschappen die doorheen de casus aan bod komen) ook intrinsiek deel uitmaken van de werkelijkheid, waaronder echte stroken papier.[18] Een aparte strekking binnen het verklarend realisme vinden we terug in het boek van James Franklin: *An Aristotelean Realist Philosophy of Mathematics* (Palgrave MacMillan, 2014). De wiskunde en de fysica smelten samen voor Franklin wat symmetrie-eigenschappen betreft, maar niet per se voor andere karakteristieken. In zijn eigen bewoordingen:

> Aristotelianism regards mathematics as literally being about some aspects of reality, but about certain kinds of properties and relations rather than about individual objects. […] Aristotelian realism holds that mathematical and all other properties can be instantiated in physical or other reality (though which ones actually are instantiated is not an a priori matter but one for nature to determine and science to discover).[19]

Het verklarend realisme is vandaag veel minder gangbaar dan het *dualisme*. Wetenschappers die nauwgezet het dualisme volgen, wensen categorisch een onderscheid te maken tussen alle facetten van de fysica enerzijds en die van de zuivere wiskunde anderzijds.

Zijn de auteurs van de casus nu *realisten* of eerder *dualisten*? Ze lijken te suggereren dat de wiskundige bevindingen per direct tot inzichten zullen leiden over de fysica van het vouwen. Tussen de regels door wordt er echter naar idealisaties verwezen, zoals het wegabstraheren van de dikte van een A4 blad: een papierstrook kan geen tien keer gevouwen worden, vermoedelijk wegens zijn dikte, iets waar we in ons wiskundig betoog gelukkig geen rekening mee moeten houden. Als dit klopt, dan zijn de auteurs eerder dualisten.

Misschien zijn de opdrachtgevers het verklarend realisme noch het dualisme consequent aan het opvolgen. Vandaag is het gebruikelijk om in eerste instantie zichzelf als een dualist te bestempelen en dan later al dan niet expliciet een beroep te doen op een isomorfisme tussen de wiskundige bevindingen enerzijds en de fysische structuur anderzijds. Maar als het isomorfisme simpelweg gepostuleerd wordt dan is men eigenlijk weer iets aan het bepleiten dat sterk op het verklarend

---

[18] Zie ook pagina 139 in: Sylvia Wenmackers, *Wetenschap*, Lannoo Campus, 2021.

[19] Geciteerd uit pagina's 2-3 in: James Franklin, *An Aristotelean Realist Philosophy of Mathematics*, Palgrave MacMillan, 2014.

realisme lijkt, iets wat de jonge Wittgenstein ook in grote mate in het tweede decennium van de twintigste eeuw deed.

De oudere Wittgenstein

Vanaf nu zal ik doodeenvoudig veronderstellen dat alle lezers van dit verslag *kritisch* ingestelde dualisten zijn, in navolging van de oudere Wittgenstein in de jaren dertig en veertig van de vorige eeuw. Dan bevat het vorig citaat een contradictie. Enerzijds beweert het citaat dat een strook papier geen 10 keer manueel kan worden gevouwen, anderzijds suggereert het citaat dat we door het bedrijven van de wiskunde inzichten zullen opdoen over het 10 of meer keren werkelijk vouwen van een echte papierstrook. Over de aard van deze zogezegde inzichten tussen de fysica en de wiskunde wordt met geen woord gerept.

Volgens mij veronderstellen de auteurs van de casus dat er inderdaad een isomorfisme bestaat tussen echte knikken in een fysische papierstrook (enerzijds) en de mathematische knikken in een looppatroon (anderzijds). In eerste instantie lijkt die veronderstelling voor de hand te liggen. We hebben meerdere experimenten met het vouwen van een strook papier uitgevoerd en telkens hebben we proefondervindelijk een gewenste koppeling tussen de fysica en onze neergeschreven wiskundige symbolen kunnen vastleggen. Na enige reflectie echter wordt het allesbehalve vanzelfsprekend waarom een miljoen keer dubbelvouwen van een fysische papierstrook überhaupt nog tot één fysisch geheel zou leiden terwijl zo'n fysische samenhang een vereiste lijkt te zijn om consequent over één en hetzelfde isomorfisme te spreken.[20] In navolging van de latere Wittgenstein lijkt de metafysische houding van de opdrachtgevers van de Wiskunde-B casus, om het zacht uit te drukken, betwistbaar.[21]

Stel dat de mensheid binnen 100 jaar de papierstrook (waar in het bovenstaande citaat sprake van is) wél 10 keer kan vouwen, of dat we morgen met speciale apparatuur wél degelijk de strook in kwestie 10 of meer keer kunnen vouwen. Mogen onze wiskundige bevindingen die we vandaag afleiden dan per direct geprojecteerd worden op onze toekomstige fysische handelingen?

Wat als ik een zeer lange papierstrook neem, namelijk één die van Brussel tot Tokio reikt, kan ik zo'n papierstrook wél 10 keer met mijn handen vouwen?

---

[20] Een alternatieve interpretatie is dat de wiskundige bevindingen *vanaf* 10 of meer keer vouwen géén fysische weerklank dienen te hebben. Aanwijzingen om deze gesofisticeerdere interpretatie te hanteren, zijn nergens in de casus te bespeuren.

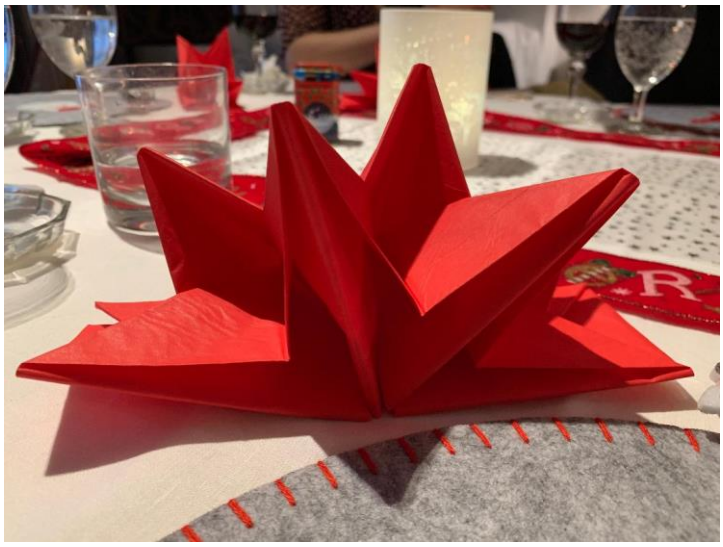
[21] Misschien is hun bedrijven van de wiskunde (bijvoorbeeld in een Cantoriaanse setting) dan eveneens voor kritiek vatbaar. Een zeer boeiend onderwerp waar ik niet verder op inga.

Vermoedelijk kan dat om geheel andere redenen ook niet. Dan is de ene fysische onmogelijkheid de andere niet alhoewel we in ons wiskundig betoog dergelijke nuances niet terugvinden.

Toeval wil nu dat mijn voormalige thesisstudent — Michiel Provoost in 2020-2021, officieel onder begeleiding van Philip Dutré — over berekenbaarheid en enorme lange stroken papier onderzoek heeft verricht. Onze inspiratie kwam voornamelijk uit het proefschrift van de theoretische informaticus Carl Petri uit de vroege jaren zestig. Een ‘te lange’ papierstrook zal opgedeeld moeten worden in aparte, kleinere stroken als men daadwerkelijk het ‘geheel’ wenst te fabriceren en te benutten. Volgens de moderne fysica is het onmogelijk om een zeer lange papierstrook als één substraat te produceren, laat staan te plooien.

Daarom is het voor mij evident geworden dat de mathematische bevindingen in de Wiskunde-B casus geen voor de hand liggende weerslag kunnen hebben op ‘te lange’ papierstroken noch op A4-stroken die ‘veel te vaak’ dienen geplooid te worden. Anderzijds blijf ik een liefhebber van de zuivere wiskunde maar dan wel om geheel andere redenen dan die die door de opdrachtgevers gesuggereerd worden. Mijn redenen zijn gerelateerd aan de zienswijzen van David Hilbert. Ik zal ze niet verder toelichten, ook al komt de heer Hilbert wel nog even aan bod.

Liefde voor de zuivere wiskunde zal bij heel wat jongeren niet toenemen als over zogezegde fysisch-onmogelijke experimenten — waaronder het 10 keer vouwen van een papierstrook — geopperd wordt. Was het voor de opdrachtgevers van de casus niet zinvoller om over fysisch haalbare symmetrieën te spreken? Het servet in de volgende afbeelding is in de echte wereld tot stand gebracht door lichtjes af te wijken van de spelregels die in de casus gestipuleerd zijn. Vermoedelijk zullen heel wat leerlingen in het middelbaaronderwijs dit voorbeeld wel aanstekelijk vinden.



Descriptief versus prescriptief

Aanhangers van het verklarend realisme en de vele dualisten die blindelings op een fysica-wiskunde isomorfisme berusten, hebben allesbehalve het wetenschappelijk profiel van David Hilbert en Albert Einstein. Beide heren waren no-nonsense dualisten en bepleiters van een axiomatisch geformaliseerde wiskunde. Hun zienswijze wordt in het volgende citaat over mathematische modellen helder gemaakt:

> Wetenschappers maken voortdurend modellen: denk aan kansmodellen, populatiemodellen, economische modellen, deeltjesmodellen, enzovoort. Zelfs 'fundamentele natuurwetten' als de wetten van Newton zijn uiteindelijk modellen. Einstein waarschuwde al: *Erst die Theorie entscheidet darüber, was man beobachten kann!* Met andere woorden: de theorie levert de begrippen waarmee de wetenschapper de werkelijkheid beschrijft. Het verschijnsel 'kracht' bijvoorbeeld is een theoretisch concept. Omdat het zo succesvol is, vergeet je dit gemakkelijk en vervaagt de grens tussen model en werkelijkheid.[22]

Voor Einstein was het verschijnsel 'kracht' zuiver abstract van aard, het was geen eigenschap van de natuur *an sich*. Sterker nog, in het formalistisch raamwerk van Hilbert betekende de mathematische symboliek op zich helemaal niks. Van een koppeling tussen de fysica en de wiskunde was er binnen elk formeel denkkader geen sprake. De wiskunde op formalistische wijze bedrijven, heeft in het beste geval indirect — d.w.z. op intuïtieve wijze — iets te maken met echte vouwingen in een papierstrook.[23]

Hilbert en Einstein hebben beiden een rol van betekenis gespeeld in de totstandkoming van "theoretical mathematics based on definition and proof," wat significant anders was dan "the practical mathematics based on natural experiences."[24] Tall schetst deze belangrijke transitie in de geschiedenis van de wiskunde op de volgende manier samen:

> This involves a total reversal of meaning. Instead of studying objects or operations that *have* (natural) properties, the chosen properties (axioms)

---

[22] Geciteerd uit pagina 244 in: Paul Drijvers, Anne van Streun, Bert Zwaneveld, 2021.

[23] Vandaar het belang van de begrippen "model" en "model fidelity". Zie onder meer: Edward A. Lee, *Plato and the Nerd,* MIT Press, 2017.

[24] Geciteerd uit pagina 147 in: David Tall, 2013.

> are specified first and the structure is shown to have other properties that can be *deduced* from the axioms.[25]

Van een descriptieve insteek gingen wiskundigen zoals Hilbert over naar een formele, betekenisloze beschouwing. In mijn eigen bewoordingen:

> Wiskundigen maakten door de eeuwen heen, via tussenverdiepingen, een transitie van inductief argumenteren met directe betrekking tot de fysica naar het louter deductief redeneren in de zuivere wiskunde.

Deze emancipatie van de mathematische symboliek t.a.v. natuurkundige verschijnselen wordt in de eerstvolgende vier punten door Tall verwoord.[26] Het vijfde punt, namelijk de opheffing van de gelijkheid tussen de fysica en de wiskunde, heb ik zelf toegevoegd.

1. *Recognition* of properties of operations in arithmetic, such as independence of order of addition and multiplication.
2. *Description* of properties such as commutativity (e.g., $3 + 4$ is the same as $4 + 3$), based on experience.
3. *Definition* of rules of operation, which are now to be obeyed in general, such as $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a(b + c) = ab + ac$.
4. *Deduction* of identities such as $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, using the 'rules of arithmetic' as a basis for reasoning.
5. Using mathematics as a *prescriptive device*:
    a. critically or hastily projecting mathematical properties onto physics (e.g., via isomorphisms)
    b. effectively or dubiously fusing mathematical and physical realms (i.e., the resurgence of propensity arguments)

De vijfde stap heb ik in navolging van de oudere Wittgenstein en gelijkdenkenden (waaronder Stuart Shanker, Kjeld Schmidt, Donald MacKenzie en Timothy Colburn) toegevoegd. Men spreekt soms ook van *propensity arguments*, wat ik in mijn eigen bewoordingen als dusdanig beschrijf: het fysisch proces in kwestie heeft, zo denkt men toch, sterk de neiging om zich als een wiskundig proces te gedragen waardoor het onderscheid tussen de fysica en de wiskunde gerust zonder meer achterwege mag gelaten worden.

Een typisch voorbeeld van het vijfde punt in de bovenstaande lijst is het meermaals werpen met een dobbelsteen. Een gloednieuwe, fysische dobbelsteen wordt blindelings gelijkgesteld aan een eerlijke, mathematische dobbelsteen.

---

[25] Geciteerd uit pagina 149 in: David Tall, 2013.
[26] Geciteerd uit pagina 148 in: David Tall, 2013.

Maar die gelijkstelling berust alweer op een *gepostuleerd* isomorfisme tussen de fysica en de wiskunde, d.w.z. louter op intuïtie en niet op deductie.[27]

Bovendien beseffen veel mensen niet eens dat ze de fysica en de wiskunde als equivalent aan het beschouwen zijn (laat staan dat men dat louter op intuïtieve wijze doet). De "grens tussen model en werkelijkheid" vervaagt maar al te "gemakkelijk" volgens Einstein (cfr. het vorig citaat dat over Einstein ging). Ter illustratie verwijs ik naar weersvoorspellingen. Voor bepaalde activiteiten zijn ze voldoende betrouwbaar geworden zodat men na enige tijd zelfs vergeet dat ze louter descriptief — en niet prescriptief — van aard zijn. De wiskundige voorspelling en het fysische weer smelten op doeltreffende wijze samen voor bepaalde toepassingen en onder de 'juiste' omstandigheden. Helaas wordt dit samensmelten van model en werkelijkheid vaak vergeten. Van zodra het toepassingsdomein lichtjes verandert, wordt men (al dan niet met serieuze gevolgen van dien) verrast of terug wakker geschud. Bijvoorbeeld, als ik tijdens een bewolkte en regenachtige dag mijn nieuwe hobby, fietsen, wens uit te oefenen zonder nat te worden, kan ik helaas weinig vertrouwen stellen in de 'real-time' weersvoorspellingen m.b.t. mijn dorp. Dat heb ik proefondervindelijk ondervonden, maar gelukkig enkel bij aanvang van mijn hobby.

Ook onder academici verdampt het onderscheid tussen fysica en wiskunde vaak.[28] Dergelijke intellectuele dwalingen leiden zelfs tot incorrecte bewijsvoeringen in de wiskundige logica.[29] Bijgevolg is de oorsprong van deze dwaalsporen het onderzoeken waard: het al dan niet opzettelijk doen samensmelten van descriptieve en prescriptieve strekkingen heeft een lange en boeiende geschiedenis die naar de geschriften van Francis Bacon teruggrijpt.[30] Dit onderwerp laat ik verder buiten beschouwing.

---

[27] Zie: Alan Hájek, "Interpretations of Probability," *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/probability-interpret/>.

[28] Zie bijvoorbeeld: Donald MacKenzie, *Mechanizing Proof*, MIT Press, 2004.

[29] Zie onder meer: Edgar G. Daylight, "The Halting Problem and Security's Language Theoretic Approach: Praise and Criticism from a Technical Historian," *Computability*, Vol. 10, No. 2, pp. 141-158, 2021.

[30] Zie: Peter Dear, *The Intelligibility of Nature: How Science Makes Sense of the World*, The University of Chicago Press, 2006. Zie ook pagina 81 in: Sylvia Wenmackers, *Wetenschap*, Lannoo Campus, 2021.